《自然科学史》

教学大纲（2012年）

李净　张红岩　肖磊　编写

目 录

前 言......6
一、本课程性质、编写目的、课程简介、编写人员......6
二、本课程的教学目的和基本要求......6
三、本课程的学时分配......6
绪 论......7
第一节 什么是自然科学史......7
一、自然科学......7
二、自然科学史......7
第二节 自然科学史的主要内容......7
第三节 学习自然科学史的意义......8
复习与思考题：......8
拓展阅读书目：......8
第一章 古老东方文明的科学技术......9
第一节 科学技术的萌芽......9
一、刀耕火种......9
二、制陶技术......9
三、冶炼技术......9
四、在古代科学史上有重要影响的 9 个国家......9
五、世界古文字......9
第二节 古埃及、美索不达米亚和印度的科学技术......10
一、古埃及的科学技术......10
二、美索不达米亚的科学技术......10
三、印度的科学技术......11
第三节 古希腊和古罗马的科学技术......11
一、古希腊的数学......11
二、古希腊的物理学......11
三、古希腊的天文学和宇宙论......12
四、古希腊的医学......12
五、古希腊的生物学......13
六、古希腊的地理学......13
七、古希腊、古罗马的四大科学成就......13
八、古希腊与古罗马在科学技术上的特点......14
九、古罗马的科学技术......15
十、古代人类最重要的 11 项技术发明......15
复习与思考题：......15
拓展阅读书目：......15
第二章 古代中国的科学技术......16
第一节 中国古代科学技术的产生......16
一、青铜器与铁器技术......16

二、实用科学知识的产生......16
三、土木建筑技术......17
第二节　中国古代实用科学体系的形成......18
一、数学体系的形成......18
二、天文学体系的形成......18
三、农学体系的形成......19
四、地理学体系的形成......19
五、医学体系的形成......19
六、建筑的发展......20
第三节　中国古代科学技术发展的高峰......20
一、四大发明......20
二、数学、天文学发展的高峰......21
三、农学、地理学的巨大成就......22
四、明末四大科技名著......23
复习与思考题：......24
拓展阅读书目：......24
第三章　阿拉伯和欧洲中世纪的科学技术......25
第一节　阿拉伯国家的科学技术......25
一、古典文化的衰弱......25
二、阿拉伯科学的兴起......25
三、阿拉伯国家的科学技术......26
第二节　欧洲中世纪的科学技术......27
一、黑暗的中世纪......27
二、十字军东征和大翻译运动......28
三、大学的创立......28
四、经验哲学——神学中的理性精神......28
五、罗吉尔·培根的实验活动......29
复习与思考题：......29
拓展阅读书目：......29
第四章　近代自然科学的诞生......30
第一节　近代科学产生的社会条件......30
一、资本主义生产方式的兴起......30
二、资产阶级反对封建的斗争......31
第二节 近代自然科学的产生......31
一、人文精神催生了科学精神......31
二、天文学和力学从神学中独立出来......32
三、科学解剖学的建立......32
四、科学兴起的重要进程......33
复习与思考题：......33
拓展阅读书目：......33
第五章　16-18 世纪的自然科学......34
第一节　哥白尼革命......34
一、哥白尼革命的背景......34

二、哥白尼革命的过程......34
三、哥白尼革命的结果......36
第二节 经典力学之外诸学科的发展......37
一、物理学......37
二、数学......38
三、化学......39
四、天文学......39
五、近代地质学的产生......40
六、生物学......40
复习与思考题：......41
拓展阅读书目：......41
第六章 第一次技术革命......42
第一节 技术发明与英国工业革命......42
一、十八世纪工业革命概述......42
二、英国工业革命......42
第二节 英国工业革命的影响......44
一、经济......44
二、政治......44
三、生产方式......44
四、科学技术......44
五、世界格局......45
复习与思考题：......45
拓展阅读书目：......45
第七章 十九世纪的自然科学......46
第一节 十九世纪自然科学领域的重大成就......46
一、数学革命的时期......46
二、物理学领域的成就......46
三、化学领域的成就......46
四、天文学......47
五、地质学......47
六、生物学......48
第二节 十九世纪自然科学三大发现......48
一、能量守恒与转化定律......48
二、细胞学说的建立......48
三、进化论......49
复习与思考题：......49
拓展阅读书目：......49
第八章 第二次技术革命......50
第一节 第二次技术革命兴起的条件......50
一、政治条件......50
二、市场条件......50
三、技术条件......50
四、科学理论基础......50

五、社会条件......50
第二节　第二次技术革命的历程......50
一、电力的广泛应用......50
二、新通讯手段的发明......51
三、内燃机和新交通工具的创制......51
四、化学工业的建立......52
第二节　两次工业革命的对比......52
一、技术变革......52
二、经济结构变革......53
三、经济组织变革......53
复习与思考题：......53
拓展阅读书目：......53
第九章　物理学革命及现代科学的产生......54
第一节　经典物理学的危机......54
一、世纪之交科学家眼中的物理学......54
二、物理学晴空的两朵乌云......54
三、19 世纪末物理学三大实验发现......54
第二节　量子力学的诞生......56
一、黑体辐射与能量量子化......56
二、光电效应与光的量子化......56
三、光的波粒二象性......57
四、原子结构模型的演变......57
五、量子论的意义......57
第三节　相对论的提出......57
一、爱因斯坦传记......57
二、相对论的提出......58
三、爱因斯坦的其它贡献......59
四、2005 年：世界物理年......59
第四节　物理学照亮世界......59
一、自然科学史上的五次大综合......59
二、力学的分类和应用范围......59
三、20 世纪：物理学的世纪......60
复习与思考题：（列每章章末）......60
拓展阅读书目：（列每章章末）......60
第十章　现代自然科学的发展（数理化）......61
第一节　现代数学的发展......61
一、现代数学两个大的发展方向......61
二、抽象代数......61
三、数理逻辑......61
四、模糊数学......61
五、运筹学......62
第二节　现代物理学的发展......62
一、深入微观世界......62

二、原子核物理学的形成与发展......62
三、粒子物理学......63
第三节 现代化学的发展......63
一、元素周期律的重新认识......63
二、物理化学的建立与分析化学的发展......64
三、有机化学的新时代......64
复习与思考题：（列每章章末）......64
拓展阅读书目：（列每章章末）......65
第十一章 现代自然科学的发展（天地生）......66
第一节 现代天文学的发展......66
一、观测手段的进步......66
二、20 世纪 60 年代四大发现......66
三、两大基本理论......67
第二节 现代地学的发展......67
一、大陆漂移说......67
二、海地扩张说......68
三、板块构造理论......68
第三节 现代生物学的发展......69
一、现代遗传学的发展......69
二、分子生物学的诞生和发展......70
复习与思考题：......70
拓展阅读书目：......70
期末复习答疑及考试阶段......71

前　言

一、本课程性质、编写目的、课程简介、编写人员

课程性质：本课程是全校各专业本科生通识主干课程。

编写目的：本大纲的目的在于建立《自然科学史》教学内容的基本框架，制定教学线索以及实施教学的过程和步骤。由于学生实际情况的不同，在实际教学的过程中可能会在学时分配和内容详略方面有所调整。

课程简介：本课程将介绍自然科学产生和发展的历程，将其放入广阔的思想和社会背景中进行阐述，涉及到各种宇宙观思想的形成、竞争、交融和更替，自然科学各门学科的前身和发源、其材料的搜集和发现，基本概念的产生，理论发展中的各种观点的提出、争议和变迁，以及相关科学家的生平及其贡献。主要内容包括：古代世界的科学技术，中国的科学技术、欧洲中世纪的自然科学、哥白尼革命、第一、第二次技术革命、十九世纪的自然科学、二十世纪物理学革命、现代科学的发展。本课程由自然科学教研室开设，是我校本科生通识主干课程之一。

编写人员：李净、张红岩、肖磊。

二、本课程的教学目的和基本要求

教学目的：　本课程旨在使学生对自然科学有一个全景式的认识，理清各门科学学科的起源及其相互之间的关联及差异，并且进一步了解科学发展背后的诸多文化及社会因素，由此把握科学知识的层次和结构，更深刻地理解科学精神的内涵。另外通过许多科学家的人生经历，可以激发学生追求真理、探索未知、求实创新、坚持不懈的精神。

基本要求：本课程只需要中学的科学知识水平。课程以人类对自然的探索来展开，需要学生带着好奇心和探究心，进入人类历史长河中的各个阶段，去的理解人类在追求知识和真理中所付出的巨大努力及取得的成果，学会同情地理解前人的错误，并从中吸取教训；学会批判地看待已有的理论，不断地发展和完善它们。

三、本课程的学时分配

本课程共 36 学时，每周 2 学时。本课程共进行 18 周。包括课堂教学、课堂讨论、课堂作业。

绪　论

本章教学目的和基本要求：理解自然、科学、历史概念上的分属，了解自然科学史的研究对象、研究方法以及主要的内容，重点有历史观念的辨析、自然科学的两大研究传统，科学史的三种编史方法，科学史的年代划分，以及学习科学史的意义。难点是历史观念的辨析和科学史三种编史方法。

第一节　什么是自然科学史

一、自然科学

（一）自然
（二）科学
科学分为自然科学和社会科学
1．自然科学
自然界中的事物与现象，其状态、属性、类型及运动变化规律。
（1）自然界：无机自然界、有机自然界（包括人的生物属性）
（2）研究领域：数学、物理学、化学、天文学、地球科学、生物学、
现代科学技术（材料、能源、信息、环境、空间、海洋……）
（3）两大传统：①数学传统　②实验传统
2．社会科学

二、自然科学史

自然、科学、历史
（一）历史：人对某种历程的记录。
1．自然科学的历程：
①内在历程：知识的产生、发展和系统化
②外在历程：社会背景（政治、经济、宗教等）
2．社会科学的历程
（二）编史法
1．实证主义编年史-萨顿　《科学史导论》
2．思想史/观念史-柯瓦雷《伽利略研究》
3．社会史(外史)
（1）默顿-科学社会学
（2）贝尔纳-科学学
4．综合史/专科史
5．世界史/国别史
（三）国际最权威的科学史杂志《爱雪斯》（Isis）

第二节　自然科学史的主要内容

第一部分　古代自然科学（16 世纪以前）

第一章　　古代世界的科学技术
第二章　　古代中国的科学技术
第三章　　阿拉伯和欧洲中世纪的科学技术
第二部分　近代自然科学（16-19 世纪）
第四章　　近代自然科学的诞生
第五章　　16－18 世纪的自然科学
第六章　　第一次技术革命
第七章　　19 世纪的自然科学
第八章　　第二次技术革命
第三部分　现代自然科学（20 世纪以来）
第九章　　物理学革命及现代科学的产生
第十章　　现代自然科学的发展（数理化）
第十一章　现代自然科学的发展（天地生）

第三节　学习自然科学史的意义

一、拓宽科学知识面
二、了解知识的来源
三、建立知识的结构
四、激发学习的兴趣
五、锻炼思考的能力

复习与思考题：

1、自然是什么 ？科学是什么 ？历史是什么 ？
2、科学史的三种编史方法

拓展阅读书目：

1．吴国盛：《科学的历程》，湖南科学技术出版社，1995，第 1-39 页。
2．斯蒂芬•F•梅森（英）：《自然科学史》，上海外国自然科学哲学著作编译组译，上海人民出版社，1970，第 1-2 页。
3．W.C.丹皮尔（英）：《科学史-及其与哲学和宗教的关系》，商务印书馆，1997，第 1-29 页。
4．科林• A •罗南：《剑桥插图世界科学史》，山东画报出版社，2010，第 1-8 页。

第一章　古老东方文明的科学技术

本章教学目的和基本要求：目的是认识科学技术的产生，对四大文明的科学技术有所了解；重点是埃及的历法和建筑、两河流域的数学和天文、古希腊的科学；难点是古希腊的数学和宇宙论。

学时分配：4

第一节　科学技术的萌芽

一、刀耕火种

（一）工具

1．石器

（1）石刀

（2）石斧。

2．弓箭

（二）火种

1．自然火种

2．人工火种

二、制陶技术

原始农业和畜牧业→安定的村落生活→日常用品的需求→制陶技术

三、冶炼技术

原始手工业→冶金技术

四、在古代科学史上有重要影响的 9 个国家

1．古埃及：　公元前 3500 年到公元前 6 世纪

2．古巴比伦：公元前 3500 年到公元前 6 世纪

3．古代印度：公元前 2500 年到公元 5 世纪

4．中国：　　夏代始年约为公元前 2070 年

5．腓尼基：　公元前 3000 年到公元前 6 世纪

6．古希腊：　公元前 12 世纪到公元前 1 世纪

7．古罗马：　公元前 1 世纪——公元 476 年

8．阿拉伯帝国：公元 7 到 13 世纪

9．奥斯曼土耳其：公元 14—17 世纪

五、世界古文字

现代人对古代各国的历史的了解，主要靠的是文字记述的资料。

（一）古埃及的象形文字

产生于公元前 4000 年左右，最初仅仅是一种图画文字，后来才发展成象形文字。

罗塞塔石碑

（二）苏美尔人的楔形文字

5000 年前，苏美尔人发明并开始使用楔形文字，他们通常用小木棒在潮湿的泥版上压出字迹，笔道的形状很象楔子，因此叫楔形文字。腓尼基人公元前 1000 多年发明的字母文字

（三）印度人的梵语

婆罗米文、佉卢文、悉昙体、天城体、蓝札体

（四）中国的汉字

甲骨文、金文、石鼓文、帛书、竹简

1．六书：（1）象形。（2）会意。（3）指事。④形声。⑤转注。⑥假借。

2．五体：（1）篆书。（2）隶书。（3）草书。④行书。⑤楷书。

第二节　古埃及、美索不达米亚和印度的科学技术

一、古埃及的科学技术

（一）古埃及的建筑技术——金字塔

（二）古埃及的历法和农业

1．人类历史上第一部太阳历：产生于 6000 多年前的古埃及

（1）天狼星与太阳同时升起的日子定为一年之始

（2）一年分为 3 季

（3）一年共 12 个月，每月 30 天，岁末增加 5 天节日，共计 365 天

2．一年分为三季：按尼罗河水涨落和作物生长的规律来划分

（1）泛滥季节

（2）播种季节

（3）收获季节

二、美索不达米亚的科学技术

（一）数学

1．进位制

（1）十进位制

（2）六十进位制:①小时、分、秒。②面积单位、重量单位。③一圆周 360 度。

（二）天文学

1．阴历：按月亮的盈亏

（1）一年分为 12 个

（2）12 个月共 354 天

（3）设设置闰月。

2．星期制

（1）七天一星期

（2）每天各有一位星神“值勤”

（三）农业

人类历史上最早的农书《农人历书》，以一个老农民教育儿子的口气写的。

1．怎样节省灌溉用水

2．不要让牲畜践踏田地

3．驱赶食谷的飞鸟

4．及时收割

（四）其他

1．药物

2．植物

3．动物

4．地理

三、印度的科学技术

（一）印度的史前文明----“哈拉巴文化”

1．巴基斯坦信德省南部的摩亨佐•达罗考古遗址：公元前 2500 年

（1）复杂的污水处理系统

（2）大澡堂

（3）青铜制的舞女像。

2．旁遮普的哈拉巴遗址

第三节　古希腊和古罗马的科学技术

古希腊的历史并不如四大文明古国悠久，但对后来欧洲乃至世界的文明发展产生巨大的影响，现代科学也正是在希腊科学的传统上发展起来的

一、古希腊的数学

（一）欧几里得《几何原本》：第一个数学理论体系，公理形式化方法。

1．定义：23 条定义

（1）点

（2）线

（3）面

2．公设与公理

（1）五条公设

（2）五条公理

3．命题：

（1）467 个

（2）13 卷

（二）阿基米德

1．形体复杂的面积和体积计算方法

2．使数学的研究同实际应用联系起来

（三）阿波罗尼乌斯的《圆锥曲线论》

1．古希腊最杰出的数学著作之一

2．炉火纯青的几何学思维

二、古希腊的物理学

（一）亚里士多德

1．古希腊第一个最认真地研究物理现象的人

2.《物理学》

（1）运动必须要有推动

（2）大自然厌恶真空

（二）欧几里得

古希腊第一个把光的研究建立在科学的基础上的人，进行了许多光学实验，并且用几何的方法加以研究。

1.《光学》：反射定律

2.《论镜》：凹面镜与凸面镜

（三）阿基米德

古希腊成就最大的物理学家，“力学之父”。

1．物理定律

（1）杠杆原理

（2）浮力定律。

2．发明众多机械：

（1）生产工具：螺旋扬水器

（2）战争武器

3．近代科学的研究方法

（1）观察实验+逻辑推理

（2）物理现象+数学论证

三、古希腊的天文学和宇宙论

地心说占统治地位，此外有多种学说。

（一）地心说

1．欧多克斯

2．阿波罗尼乌斯

3．伊巴谷

（二）日心说

1．赫拉克勒斯

2．阿里斯塔克

3．阿基米德

（三）中心火说

毕达哥拉斯学派

1．中心火为中心

2．对地

四、古希腊的医学

（一）希波克拉底

1．西方“医学之父”

2．“四体液说”

（1）血液

（2）粘液

（3）黄胆汁

（4）黑胆汁。

3．“希波克拉底誓言”
（二）赫罗菲拉斯
1．建立了一个医学学派。
2．重视实际经验：利用死刑犯做过解剖。
3．第一个区分动脉和静脉的人。
4．给肠子的第一段定名为十二指肠。
（三）埃拉西斯特拉塔
1．把生理学做为独立学科来研究的第一人。
2．区分了大脑和小脑，认为大脑是思维的器官。
3．认为人体的全部功能本质上都是机械的。

五、古希腊的生物学

（一）亚里士多德
1.《动物志》：观察和解剖
（1）动物生活野外观察
（2）室内解剖动物实录。
2．四篇动物学著作
（1）《动物的构造》
（2）《动物的运动》
（3）《动物的行进》
（4）《动物的生殖》
3．在植物界有一种延续不绝的级序，以逐步趋向于动物界，各种动物进化于人类。
（二）狄奥弗拉斯特
继承和补充了他的老师亚里士多德的工作。

六、古希腊的地理学

（一）埃拉托色尼
希腊化时代的亚历山大城
生活在希腊化时代的亚历山大城，是古希腊最伟大的地理学家，曾任亚历山大城图书馆馆长。
1．著作
（1）《对地球大小的修正》
（2）《地理概述》
2．计算地球的周长
（1）地球圆周 24700 哩
（2）距实际数值仅相差 250 哩
（3）到 18 世纪才得到订正。
3．绘制的有人居住的世界地图
（1）首次用经纬网格标示地点
（2）记载了地形、气候和矿产等情况。

七、古希腊、古罗马的四大科学成就

（一）亚里士多德的逻辑学体系
亚里士多德：柏拉图的学生，亚历山大大帝的老师。

1．认为分析学或逻辑学是一切科学的工具。
（1）把思维形式和存在联系起来
（2）按照客观实际来阐明逻辑的范畴。
2．形式逻辑学的奠基人：形式逻辑基本规律
（1）同一律
（2）矛盾律
（3）排中律。
（二）欧几里得《几何原本》
第一个数学理论体系，公理形式化方法。
（三）托勒密的天文学体系
支配西方天文学达 1500 年之久。
1．地心宇宙观：
（1）宇宙是有限的球体
（2）地球在宇宙的中心，静止不动
（3）恒星和行星围绕地球运动。
2．“拯救现象”：
（1）天上的世界是神圣完美的
（2）完美的图形是圆形，完美的形体是球体
（3）用匀速圆周运动去解释行星的运动。
3．行星天文学
（1）本轮-均轮体系
（2）天球。
（四）盖伦的医学体系
盖伦(Calen，129-199)是古罗马时期最著名最有影响的医学大师，仅次于希波克拉底的第二个医学权威。
1．血液的运动理论
（1）血液以单程直线运动方法往返活动
（2）心间隔上有小孔，血液能通过小孔，往返于心脏左右两边
（3）以上两点都是错误的。
2．描述性生物学
（1）人体解剖结构的系统描述，但有错误
（2）解剖对象主要是动物
（3）生理描述往往屈从于宗教神学的需要。

八、古希腊与古罗马在科学技术上的特点

（一）古希腊的科学技术特点
1．崇尚理性，追求纯粹的知识。
2．蔑视功利，轻视技术与经验。
3．自由、好奇的学术精神。
（二）古罗马的科学技术特点
1．注重实用，不喜欢玄想：宏伟的工程。
2．为了完成实际工作，才对科学关心。
3．对前人成就的总结与综合：实用价值的百科全书。

九、古罗马的科学技术

古罗马的技术成就是古代西方科技成就的代表。

（一）手工业

1．纺织

2．玻璃制造

（1）玻璃吹制法

（2）玻璃切割技术

3．冶矿

4．和机械制造

（二）建筑工程技术

1．维特鲁维奥：西方建筑学的鼻祖

（1）《论建筑》

（2）世界上第一部建筑学专著

（3）建筑学上的百科全书。

2．古罗马的水利建筑技术

（1）古罗马引水道工程

（2）成功地开发了运河

3．道路的修建

（1）“条条大道通罗马”

（2）遇河架桥、逢山凿洞

4．著名建筑

（1）罗马万神庙

（2）圆形竞技场

十、古代人类最重要的 11 项技术发明

1、石器　2、火　3、语言　4、畜牧和农业　5、陶器　6、轮子
7、文字　8、青铜和钢铁的冶炼　9、船　10、纺织　11、玻璃

复习与思考题：

1、 科学知识的产生的原因是什么？

2、 《几何原本》的特色是什么？

3、 古希腊的宇宙论有哪些？

4、 阿基米德的科学方法是怎样的？

拓展阅读书目：

1．吴国盛：《科学的历程》，湖南科学技术出版社，1995，第 1-39 页。

2．W.C.丹皮尔（英）：《科学史-及其与哲学和宗教的关系》，商务印书馆，1997，第 1-29 页。

3．科林• A •罗南：《剑桥插图世界科学史》，山东画报出版社，2010，第 1-8 页。

第二章　古代中国的科学技术

本章教学目的和基本要求：了解与西方近代科学类型不同的科学体系，把握古代中国对认识自然的特点，重点的是中国的天文学、宇宙论、农学、四大发明和明末四大科技名著；难点是中国的数学和医学体系。

学时分配：4

第一节　中国古代科学技术的产生

产生时期：夏、商、周

自成体系：秦汉

高峰时期：宋元

一、青铜器与铁器技术

（一）生产工具

1．石器

2．青铜器

3．铁器

（二）青铜器

1．商末周初，中国进入青铜器时代

2．青铜是铜、锡、铅等元素的合金。

3．青铜器是以合理的配比冶炼熔铸而成。

（1）越王勾践剑

（2）吴王夫差矛

（三）铁器

1．春秋战国时期广泛使用

2．生铁冶炼技术

公元前 6 世纪

3．铸钢和铸铁柔化术

公元前 5－4 世纪

二、实用科学知识的产生

（一）农学

1．精耕细作的传统

（1）铁器

（2）畜力

2．农业辩证法思想—《吕氏春秋》

（1）《上农》

（2）《任地》

（3）《辨土》

（4）《审时》

（二）天文学

1．农业生产的实际需要

2．统治阶级对“天”的崇拜

（1）礼仪

（2）星占

3．积累了大量的观测资料

（1）太阳黑子

（2）日食

（3）彗星

（4）超新星爆发

（三）数学

1．殷代以前：十进位记数法

2．商周：自然数的四则运算

3．春秋末年：筹算法

（四）地理学

《山海经》

1．富于神话传说的最古老的地理书

（1）《山经》：5 卷

（2）《海经》：8 卷

（3）《大荒经》：5 卷

2．内容包罗万象

（1）山川地理

（2）动植物

（3）矿产

（4）海外各国

（5）神奇事物

（6）神话寓言：①夸父逐日。②女娲补天。③精卫填海。④大禹治水。⑤共工撞天。⑥羿射九日。

（五）医学

医术与巫术的分离

1．《周礼》

（1）医学四科：①食医。②疾医。③疡医。④兽医。

2．名医扁鹊

三、土木建筑技术

（一）宫殿

（二）柔性框架结构

1．商代的宫殿

2．后世的发展

第二节　中国古代实用科学体系的形成

一、数学体系的形成

（一）《九章算术》
约成书于公元前 1 世纪
1．采用问题集的形式写成
（1）246 个问题
（2）实际计算的范例
（3）平面几何图形面积
（4）比例理论和算法
（5）盈亏问题
（6）多位数和分数开方法则
（7）高次方程数值解法
（8）平面几何图形面积
2．正、负数概念
3．运算法则
（二）《周髀算经》
约成书于公元前 1 世纪
1．勾股定理在天文学的运用
2．开平方
3．等差级数
4．复杂的分数运算

二、天文学体系的形成

（一）太初历
1．公元前 104 年汉武帝颁行
2．岁日
（1）一年等于 365.2502 日
（2）一月等于 29.53086 日
（3）改十月为岁首为以正月为岁首
3．二十四节气
（1）利于农时
（2）设置闰月
4．日食周期：一百三十五个月
5．意义
（1）我国第一部比较完整的历法
（2）当时世界上最先进的历法
（3）沿用了 **189** 年
（二）天文仪器的制造
1．天球仪
2．浑天仪

3．地动仪

（三）宇宙结构的学说

1．盖天说

2．浑天说

3．宣夜说

三、农学体系的形成

（一）北魏的贾思勰

（二）《齐民要术》

1．完整保存最古的农书

2．农学百科全书

（1）作物栽培

（2）耕作技术

（3）农具使用

（4）畜牧兽医

（5）食物加工

四、地理学体系的形成

（一）东汉的班固

（二）《汉书·地理志》

五、医学体系的形成

（一）《黄帝内经》

1．战国晚期

（1）最早的中医理论

（2）医疗经验：①预防。②诊断。③治疗。

（3）学术理论：①生理。②心理。③病理。

2．医学理论体系

（1）阴阳

（2）五行：①水。②木。③火。④土。⑤金。

（3）六气：①风。②寒。③暑。④湿。⑤躁。⑥热。

（4）臟腑：①五臟。②六腑。

（5）经络

（6）天人合一

（7）辩证施治

（二）《神农本草经》

1．最早的药学专著

2．药物学体系

（1）365 种药物：①产地。②性质。③采集时间。④入药部位。⑤主治病症。

（2）三品：①上品。②中品。③下品。

（3）方剂配伍原则：①君，主养命。②臣，主养性。③佐使，主治病。

（4）七情和合：①单行。②相须。③相使。④相畏。⑤相杀。⑥相恶。⑦相反。

（三）《伤寒杂病论》

1．东汉末年张仲景
2．最早的临床诊疗专书
（1）原书已佚：①。②。③。
（2）后世整理成两部：①《伤寒论》。②《金匮要略》。
（3）两本书共载药方 269 个，使用药物 214 味

六、建筑的发展

（一）秦始皇陵
1．九层之台复原图
2．陵内想象图
3．兵马俑
（二）万里长城
1．东起辽东，西至甘肃嘉峪关
2．历代长城总长为 21196.18 千米
（三）三大水利工程
1．都江堰
（1）世界水利文化的鼻祖：①年代最久。②唯一留存。③无坝引水。
（2）秦国蜀郡太守李冰：①宝瓶口。②分水鱼嘴。③飞沙堰。
（3）综合水利工程：①防洪。②灌溉。③航运。
2．郑国渠
（1）韩国水工郑国：①公元前 246 年。②秦始皇元年。③十年完工。
（2）全长约 150 公里，可灌溉 18 万余公顷
（3）首开了引泾灌溉之先河
3．灵渠
（1）“世界古代水利建筑明珠
（2）公元前 214 年凿成通航
（3）广西兴安县境内：①连接湘漓二水。②沟通长江和珠江水系。

第三节　中国古代科学技术发展的高峰

一、四大发明

（一）造纸术
1．东汉元兴元年（105）蔡伦改进了造纸术
（1）材料：①树皮。②麻头。③敝布。④鱼网.
（2）工艺：①挫。②捣。③抄。④烘.
（3）步骤：①原料分离。②打浆。③抄造。④干燥。
2．传播
（1）欧洲第一个造纸场：①公元 1150 年。②阿拉伯人。③西班牙的萨狄瓦。
（2）17 世纪欧洲各国大都有了自己的造纸业
（3）美国第一家造纸厂：①1690 年。②费城附近。
（4）中国先进的造纸技术在欧洲传播：①乾隆年间。②耶稣会教士蒋友仁。③将造纸技术画成图寄回了巴黎。

（5）机器造纸的方法：①1797 年。②法国人尼古拉斯·路易斯·罗伯特

（二）火药

1.《真元妙道要略》850 年

（1）郑思远

（2）火药混合物：①硝石。②硫黄。③木炭。

2.《武经总要》1044 年

（1）曾公亮

（2）最早的军用火药配方：①毒药烟球。②蒺藜火球。③火炮。

3．火药武器用于战争

（1）公元十世纪北宋初年

（2）火器发展三个阶段：①初级火器的创制。②火铳的发明和发展。③火绳枪炮和传统火器同时发展。

（3）现存最早的火铳：①元至顺三年。②公元 1332 年。③朱元璋军队仅小型火铳就有 2 万支。

（4）明朝晚期戚继光练兵仍然停留在冷兵器时代。

4．火药配制技术的西传

（1）公元 8 世纪传到阿拉伯和波斯

①“中国雪”。②“中国盐”。③。

（2）公元 14 世纪初传给了欧洲

（三）指南针

1．沈括的《梦溪笔谈》

（1）指南针最早的系统阐述

（2）地球磁偏角的发现

2.《萍洲可谈》1119 年

记录了中国海船上使用指南针的情况

3．13 世纪初欧洲航海才有指南针记录

（四）活字印刷术

1．北宋毕昇发明

（1）泥活字

（2）两块带框铁板

（3）松脂、蜡、纸灰的混合物：①遇热融化。②冷却凝固。

2．传播

（1）元朝时：边疆少数民族地区

（2）1440 年约翰内斯·古腾堡发明了铅字的活字印刷，欧洲中心论的欺骗行为

二、数学、天文学发展的高峰

（一）宋元四大数学家

1．秦九韶

（1）性极机巧，星象、音律、算术，以至营造等事，无不精究。

（2）《数书九章》：①“正负开方术”高次方程数值解法。②“大衍求一术”一次同余组解法。

2．李冶

（1）《测圆海镜》：天元术的代表作。

（2）《益古演段》：普及天元术的著作。

3．杨辉

4．朱世杰

（二）《授时历》

中国古代最精密的历法

（三）天文仪器的制造

1．郭守敬

（1）测影器

（2）简仪

2．苏颂与水运仪象台

三、农学、地理学的巨大成就

（一）农学

1.《陈敷农书》

2.《王祯农书》

（二）地理学

1.《长春真人西游记》

（1）长春真人丘处机西行经过

（2）李志常为随行弟子之一

（3）内容：①山川道里。②见风俗人情。③丘处机生平。

2.《河源志》

（1）元代潘昂霄

（2）历史上王朝首次派遣人员考察黄河源头情况

（3）考察成果：①河源情况。②第一次记述了积石州以上的黄河及其主要支流的名称。③。

3．地图

（1）宋代：①"淳化天下图"。② "华夷图"。

（2）元代：①"舆迹图"。②"六经图"。

（三）医学的全面发展

1.《太平圣惠方》

（1）宋太宗诏编方书

（2）全书共 1670 门，方 16834 首：中国最早记录白内障针拨手术

（3）因卷帙较大，流传较少

2.《政和圣济总录》

（1）宋徽宗诏编中医方剂著作

（2）疾病分为 66 门，门下再分病证

3.《洗冤录》

世界上最早的法医学专著

（1）宋朝法官宋慈所著

（2）记述内容①人体解剖。②检验尸体。③勘察现场。④鉴定死伤原因。⑤自杀或谋杀现象。⑥各种毒物和急救、解毒方法等

（3）区别死亡的方法：①溺死。②自缢与假自缢。③自刑与杀伤。④火死与假火死.

（4）具体方法：①洗尸法。②人工呼吸法。③迎日隔伞验伤。⑤银针验毒。⑥明矾蛋白解砒霜中毒。

四、明末四大科技名著

（一）徐光启的《农政全书》

1．徐光启(1563—1633)

（1）上海小地主家庭

（2）从小从事农业生产劳动

（3）在天津组织农民做种植水稻试验

（4）从南洋引种红薯成功

2．古代农业科学之集大成

（1）全书共 60 卷，五十多万字

（2）分农本、田制、农事、水利、农器、树艺、蚕桑、蚕桑广类、种植、牧养、制造和荒政 12 项

3．六万多字是他自己的研究成果

（二）宋应星的《天工开物》

1．宋应星（1587—1661）

（1）江西奉新县人

（2）对生产技术尤感兴趣

2．手工业生产技术的百科全书

（1）上中下三部分共 18 卷

（2）包括农作物栽培、农产品加工、机械、砖瓦、制盐、制糖、陶瓷、冶炼、养蚕、纺织、染色、造纸、兵器、火药、采煤、榨油等诸多部门

（3）世界上第一次记载炼锌方法

（4）流传概况：①满清统治时期几乎绝迹。②英国，俄国，德国，日本都有翻译本，法国有全译本，。③法国的国家图书馆有明朝最初原刻本。

3．《论气·气声》篇是论述声学的杰出篇章

（三）李时珍的《本草纲目》

1．李时珍(1518—1593)

（1）湖北新州医生世家

（2）放弃科举之选潜心学医

（3）历时二十多年实地考察

2．全书 52 卷、190 万字

（1）全书分 16 部：水、火、土、金石、草、谷、菜、果、木、服器、虫、鳞、介、禽、兽、人。

（2）62 类：①药物 1892 种。②附方 ll096 个。③插图 1160 幅。

3．四分之一的药物为新增

4．曾被达尔文的《物种起源》引用

（四）徐霞客的《徐霞客游记》

1．徐霞客（1586—1641）

（1）江苏江阴人

（2）旅行家和地理学家

2．六十万字的日记体著作

包含地貌学、溶岩学、生物学、矿物学、民俗学，以及地方史志资料。

复习与思考题：

1、 中国医学理论体系的核心思想是怎样的？

2、 中国古代的宇宙论有哪些？

3、 简要介绍一下四大发明产生及应用的情况？

拓展阅读书目：

1．吴国盛：《科学的历程》，湖南科学技术出版社，1995，第 82-92、209-273 页。

2．斯蒂芬•F•梅森（英）：《自然科学史》，上海外国自然科学哲学著作编译组译，上海人民出版社，1970，第 61-77 页。

3．科林• A •罗南：《剑桥插图世界科学史》，山东画报出版社，2010，第 96-143 页。

第三章　阿拉伯和欧洲中世纪的科学技术

本章教学目的和基本要求：了解人类文明的复杂和错综，认识科学发展的曲折经历，重点是欧洲古典文化衰弱的原因、阿拉伯的科学技术、文艺复兴的背景；难点是阿拉伯的数学和医学、炼金术对化学的促进以及经院哲学。

学时分配：2

第一节　阿拉伯国家的科学技术

476 西罗马帝国灭亡

（公元 7 到 13 世纪，我国唐朝到宋朝时期）

一、古典文化的衰弱

（一）公元 1-5 世纪：古典文化的衰弱时期

1．基督教的兴起

2．西罗马帝国的灭亡

3．柏拉图学院的关闭

4．亚历山大图书馆被烧

（二）公元-10 世纪：黑暗时代

1．蛮族入侵

2．经济倒退

3．文化低谷

4．精神愚昧迷信

二、阿拉伯科学的兴起

（一）阿拉伯帝国的崛起

1．公元 5 世纪的阿拉伯半岛

2．穆罕穆德

3．大规模的对外战争

（1）领土扩张

（2）8 世纪初

（3）地跨亚、非、欧的封建军事帝国

（二）阿拉伯在科技传播方面的贡献

1．保存了古希腊古罗马人的科学成就

（1）翻译保存了古希腊古罗马的著作

（2）“智慧馆”：专门的翻译机关

（3）欧洲人通过后来通过阿拉伯译本认识到这些学术成就。

2．沟通了东西方的科学技术交流

（1）经济繁盛，国际贸易发达

（2）中国文明的西传

（3）中国的造纸术的西传

三、阿拉伯国家的科学技术

（一）天文学的成就
1．天文观测
（1）天文台
（2）天文观测器
2．修正托勒密的天文常数
（二）数学的成就
1．阿尔·花剌子模
（1）代数之父
（2）《复原与化简算术》
（3）引进了印度数字，发展了算术
2．三角学
（1）三角函数值表
（2）余切、正割、余割的概念
（3）球面三角
（三）医学的贡献
1．累塞斯
（1）《天花和麻疹的鉴别》
（2）《万国医典》
（3）介绍了炼金家的仪器设备
（4）为巴格达医院选址
2．阿维森纳
（1）获准进入王室图书馆阅读
（2）《医典》
（3）药物
（4）疗法
（四）光学的贡献
1．对光学现象的重视
（1）地域原因
（2）眼病的盛行
2．阿尔·哈金
（1）球面和抛物面的反射镜、透镜
（2）光的反射定理
（3）眼睛的构造及其作用
（4）光线来自观察物的反射
（五）炼金术对化学的促进
1．历史过程
（1）7－9 世纪
（2）8－10 世纪
（3）12 世纪以后
2．埃及的炼金术
3．炼金术的哲学化

（1）柏拉图《蒂迈欧篇》
（2）亚里士多德目的论哲学
（3）斯多亚学派
4．作为技术的炼金术
（1）物质形态的改变
（2）金银赝品的制造
（3）步骤
（4）第一属性与第二属性之争
5．炼金术对化学的促进
（1）实验意识
（2）实验器具
（3）符号表达
（4）意外产品

第二节　欧洲中世纪的科学技术

一、黑暗的中世纪

（一）476 西罗马帝国灭亡
（二）封建制度形成和发展
1．工商业衰落
2．文化处于低潮
3．基督教会的势力不断膨胀
（三）黑暗前的二传手
1．波依修斯
（1）《哲学的安慰》
（2）“四艺”。
2．伊西多尔：《词源》。
（四）日耳曼诸王国的学术
1．修道院：学问中心
2．阿尔昆：宫廷学校里讲授七艺
3．宇宙帐篷说
4．学者们不懂“三角形内角和为两个直角”
5．书籍做摆设
（五）人口比较：公元 1000 年
（六）基督教会势力的膨胀：
1．基督教产生
2．基督教发展
3．基督教的巩固
4．基督教会超越王权
5．严格控制思想
6．宗教裁判所
（七）科学的凋零

1．庄园经济
2．神学思想的禁锢
3．古代学术丢失

二、十字军东征和大翻译运动

（一）十字军东征
1．11 世纪开始，延续了二百多年
2．罗马教皇势力鼎盛时期：夺取圣地耶路撒冷
3．促成了文明交流和融合
（二）大翻译运动
1．十字军从东方带回文献
2．12 世纪翻译阿拉伯文献的热潮
3．大翻译的中心
（1）西班牙的托莱多
（2）意大利的西西里。
4．翻译人物：杰拉德
（1）亚里士多德的著作
（2）托勒密的著作
（3）希波克拉底和盖伦的著作
（三）欧洲学术的第一次复兴
1．12 世纪
2．哲学和科学领域

三、大学的创立

（一）11 世纪之前
1．教会学校：培养神父和教士
2．城市居民求知欲的提高
（二）欧洲最早的大学
1．公元 1100 年左右：博洛尼亚大学成立
2．公立大学
3．教会大学
4．国立大学
（三）意义
1．学习机构
2．研究机构

四、经验哲学——神学中的理性精神

（一）教父哲学
1．德尔图良
2．奥古斯丁
（二）经院哲学
1．教父哲学让位经院哲学。
2．用推理的方式对基督教义做出分析和解释

3．唯名论与唯实论
4．托马斯·阿奎那《神学大全》
（三）意义
1．思维方式的转变
2．学习方式的转变

五、罗吉尔·培根的实验活动

（一）背景
（二）近代自然科学的前驱
1．认识真理的道路
2．犯错四因
3．“实验是科学之王”
4．提出数学教育的重要性

复习与思考题：

1、 阿拉伯世界的兴起在科学史上的意义是怎样的？
2、 炼金术对化学的促进作用有哪些？
3、 通过本章的内容可看出神学、哲学与科学的关系是怎样的？

拓展阅读书目：

1．吴国盛：《科学的历程》，湖南科学技术出版社，1995，第 183-284 页。
2．斯蒂芬•F•梅森（英）：《自然科学史》，上海外国自然科学哲学著作编译组译，上海人民出版社，1970，第 61-114 页。
3．W.C.丹皮尔（英）：《科学史-及其与哲学和宗教的关系》，商务印书馆，1997，第 108-154 页。
4．科林• A •罗南：《剑桥插图世界科学史》，山东画报出版社，2010，第 155-210 页。

第四章　近代自然科学的诞生

本章教学目的和基本要求：从近代科学的诞生中了解科学与其他各领域以及社会之间的关系，从而更好地把握科学的本质方法及其精神内涵，重点是资本主义生产方式的兴起、远洋航海、文艺复兴、思想解放运动、科学解剖学；难点是宗教改革、人文精神的内涵和托勒密的地心说体系

学时分配：2

第一节　近代科学产生的社会条件

一、资本主义生产方式的兴起

（一）手工工场的出现与生产技术的进步

1．14 世纪资本主义生产方式的兴起

（1）分散的家庭手工业

（2）集中的手工工场

（3）欧洲资本主义生产方式

2．15 世纪下半叶起出现技术改革

（1）丰富的实践经验

（2）大量的研究课题

（二）远洋航海与地理大发现

1．航海事业

（1）狭小市场和原材料供应。

（2）富饶东方。

2．《马可波罗行纪》

（1）世界第一奇书。

（2）激起了欧洲人对东方的倾慕。

（3）地理学家依此绘制早期的“世界地图”。

3．“黄金渴望”与新航路

（1）“黄金渴望”。

（2）海路

（3）陆路

4．撬动历史的主角——香料

5．15 世纪地理大发现

（1）1487 年，迪亚士

（2）1497 年达伽马

（3）15 世纪末哥伦布

（4）1519 年麦哲伦

6．意义

（1）地理学变革

（2）获得大量珍贵的经验资料

（3）提出了众多实践课题

（4）增强了资本主义的经济实力

二、资产阶级反对封建的斗争

（一）文艺复兴与思想解放

1．文艺复兴

（1）发源于意大利

（2）最初口号

（3）主要表现领域

（4）主题精神

2．人文精神的内核

（1）人性

（2）理性

（3）超越性

3．从西洋美术史看“以神为本”

（二）宗教改革运动

1．主要起因

（1）经济方面

（2）政治方面

（3）思想方面

（4）宗教方面

2．主要内容

（1）圣经是信仰的最高权威

（2）不承认教皇和教会有解释教义的绝对权力

（3）因信称义

（4）信徒能直接与上帝相通

（5）用民族语言举行宗教仪式、简化形式

3．结果

（1）基督教新教

（2）民族语言的《圣经》

（3）民族意识的觉醒

第二节 近代自然科学的产生

一、人文精神催生了科学精神

（一）以人为本

1．关注世间、关注个体

2．关注自然、关注经验

（二）理性精神

（三）超越精神

1．追求理想世界

2．追求理想人格

二、天文学和力学从神学中独立出来

（一）地理大发现的推动
1．如何精确地测量海船的经纬度
（1）纬度的测量
（2）经度的测定
（二）．古希腊托勒密地心学说
1．地球居宇宙中心、静止不动
2．恒星、天球
3．行星问题
4．“拯救现象”
5．本轮-均轮体系
（三）哥白尼的日心学说
1．《天球运行论》1543 年
2．新柏拉图主义思想
3．地球的三种运动
4．公元 1616 年被列为禁书
（四）布鲁诺
1．意大利思想家
2．热情地宣传哥白尼的太阳中心说
（1）《论原因、本原和同一》
（2）《论无限宇宙和世界》
3．推进了哥白尼的学说
（1）宇宙是无限的
（2）太阳是无数恒星之一
（3）可居住的星球无限多
4．激怒教会
（1）除教籍
（2）入狱
（3）火刑

三、科学解剖学的建立

（一）安德烈•维萨里的《人体结构》
1．青年时代求学于法国巴黎大学
（1）课堂讲授盖仑的“解剖学”
（2）实验课
（3）学生不允许动手操作
2．勤奋求知
（1）自学解剖学知识
（2）亲自动手做解剖实验
3．威尼斯帕多瓦大学任教
（1）获得博士学位
（2）讲课时进行尸体解剖

（3）活体解剖教学
4.《人体结构》
（1）1543 年
（2）人体各系统
（3）科学的解剖学建立的重要标志
5．教会的迫害
（1）离开帕多瓦
（2）判死罪
（3）免于死罪
（4）遇难身亡
（二）塞尔维特
1．维萨里在巴黎大学的同学
（1）两人私下一起解剖研究
（2）维萨里离校，塞尔维特留校
2．血液的肺循环
（1）盖伦的错误
（2）血液的肺循环
（3）1553 年《基督教的复兴》
3．触怒教会
（1）火刑
（2）逃脱
（3）难逃火刑

四、科学兴起的重要进程

1．11～13 世纪：大翻译运动时期 （我国宋朝）
2．十四世纪 ：文艺复兴时期 （我国元明朝）
3．十五世纪 ：地理大发现时期 （我国明朝）
4．16～17 世纪：科学革命时期 （我国明清朝）
5．十八世纪 ：工业革命时期 （我国清朝）
6．十九世纪 ：古典科学全面发展时期（清朝）
7．二十世纪 ：现代科学技术时期

复习与思考题：

5、 文艺复兴时期的欧洲人为什么会对东方有着强烈的向往？
6、 人文精神的内涵是怎样的？
7、 哥白尼日心说对托勒密的地心说的革新之处有哪些？

拓展阅读书目：

1．吴国盛：《科学的历程》，湖南科学技术出版社，1995，第 274-316 页。
2．斯蒂芬•F•梅森（英）：《自然科学史》，上海外国自然科学哲学著作编译组译，上海人民出版社，1970，第 94-114 页。
3．W.C.丹皮尔（英）：《科学史-及其与哲学和宗教的关系》，商务印书馆，1997，第 155-188 页。
4．科林• A •罗南：《剑桥插图世界科学史》，山东画报出版社，2010，第 211-2638 页。

第五章　16-18 世纪的自然科学

本章教学目的和基本要求：了解近代科学的起源及其历程，从中把握科学的精神及方法，重点是哥白尼革命的重要科学家及其贡献、静电和静磁的研究、近代化学学科的确立、燃烧现象的解释、岩石成因的争论、血液循环的发现、生物分类法；难点是机械自然观和微积分的创立。

学时分配：4

第一节　哥白尼革命

一、哥白尼革命的背景

（一）天上的现象
1．视运动
2．肉眼所见天体
（1）太阳
（2）月亮
（3）恒星
（4）行星：①逆行运动。②亮度变化。
（二）数学描述
1．托勒密天文学
（1）地球静止、位于宇宙的中心
（2）以均匀、圆形的运动拯救行星现象
（3）两球模型和本轮-均轮体系
2．托勒密之后的天文学
（三）理论的解释
1．亚里士多德宇宙论
（1）地下：四大元素（多变易朽）
（2）天上：以太天球（永恒不朽）
（3）有限、封闭、有等级秩序的宇宙
2．亚里士多德的物理学
（1）运动必有推动者
（2）大自然厌恶真空
（3）四因说

二、哥白尼革命的过程

（一）哥白尼：日心体系
1.《天球运行论》1543 年
（1）地球的三种运动：①周日自转。②周年公转。③周年回转运动（地轴）。
（2）本轮-均轮体系
2．意义
（1）严格地建立第一个日心说的天文学体系，打破了地心说

（2）定性解释优于托勒密体系
3．问题
（1）定量解释上还是很复杂
（2）物理上没有得到解释
（3）带来观测问题（恒星视差）
（二）第谷：精确的观测数据
1．“欧洲星学之王”
（1）观测超新星爆发，发表论文《新星》
（2）丹麦国王腓特烈二世为其在汶岛建造天文观象台
2．天才的观测家
（1）许多大型精密的天文仪器
（2）20 多年系统定期地观测
（3）获得人类肉眼观测最精确的数据
3．折衷的理论家：第谷体系
（1）行星绕太阳运行
（2）太阳带着行星绕地球运行
4．意义
（1）为行星定律奠定了经验数据的基础
（2）第谷体系被广泛接受，使得人们向日心说更近一步
5．第谷体系问题
（1）定性解释居于两大体系之中
（2）定量解释仍无进展
（三）开普勒：行星定律
1．狂热的新柏拉图主义者
（1）相信数学上简单的定律是所有自然现象的基础
（2）相信太阳是所有天体运动的物理原因
（3）早年设计的宇宙体系
2．“天空立法者”
（1）接受第谷的观测数据
（2）寻找火星的精确轨道：最初仍是采用圆周运动
（3）理论与第谷数据的不符：8 分的误差①放弃理论？②忽略误差？
（4）转向椭圆轨道
（5）行星运动的三大定律：①椭圆轨道定律。②面积定律。③周期定律。
3．意义
（1）理论突破：打破了圆周运动的规定
（2）定性解释很优秀
（3）定量解释很精确
4．问题
（1）行星运动的物理机制未得到解释
（2）恒星周年视差问题仍在
（四）伽利略：新天象、新力学
1．新天象
（1）用望远镜观察天空

（2）发现月亮的山脉、木星的四颗卫星
（3）恒星的数量增多，恒星的表现尺寸却不变
2．新力学
（1）惯性原理
（2）落体加速度与重量无关
（3）钟摆的等时性定律
（4）物体的距离、速度和加速度之间的关系
（5）提出了无穷集合的概念
（6）潮汐现象
3．意大利语的著作普及了哥白尼学说
（1）《关于托勒密和哥白尼两大宇宙体系的对话》
（2）《关于两种新科学对话集》
4．意义
（1）打破以往的观念：①天空不再神圣。②有限的宇宙变大了。
（2）新力学为日心说做定性辩护
（3）普及和推广了日心说
（4）近代力学之父：重视实验和数学工具
5．问题
未能给出最终的运动定律
（五）牛顿：运动定律、机械世界观
1．完整的力学理论体系
（1）三条基本运动定律：①惯性定律。②加速度定律。③作用力与反作用力定律。
（2）万有引力定律
2．《自然哲学的数学原理》
（1）导论：定义、运动的基本定理或定律
（2）第一篇：论物体的运动
（3）第二篇：论物体(在阻滞介质中)的运动
（4）第三篇：论宇宙体系
（5）哲学中的推理规则、总释
3．机械世界观
（1）微粒与引力
（2）绝对时空观
4．意义
（1）简单的数学原理统一了天上地下的运动
（2）第一个完整的科学的宇宙论和运动理论
5．问题
（1）引力的超距作用
（1）绝对时空的观念

三、哥白尼革命的结果

（一）现代科学和现代哲学
1．自然的数学化
2．近代的科学方法

3．哲学中的“哥白尼革命”
（二）形成近代世界观
1．天上和地下的统一
2．天国变成天空
3．宇宙的有限到无限
4．人中心地位的丧失
5．有机宇宙到机械宇宙
6．目的论的终结
（三）近代心灵和古代心灵
1．近代心灵
空间、时间、力、运动、质量、定律
2．古代心灵
实体、属性、形式、质料、广延、因果性、可能性与现实性

第二节　经典力学之外诸学科的发展

一、物理学

（一）对热的研究
1．16－17 世纪：测量温度
（1）温标
（2）温度计
（3）热学走上定量科学
2．1756 年：布莱克
（1）潜热
（2）比热
（3）创立测定热量的理论和方法
3．热质说（热素说）
（1）热质：特殊的物质①没有质量。②没有体积。③广泛渗透性。
（2）总热量是守恒
（3）18 世纪占统治地位
（二）对电磁现象的实验研究
静电和静磁：静电相互作用和电的运动特性
1．1729 年：首次区分导体和绝缘体
（1）导体
（2）绝缘体
2．1734 年：发现正电和负电
（1）同性相吸
（2）异性相斥
3．1745－1746 年：莱顿瓶
（1）能储存电荷的装置
（2）有助于实验研究
4．1785 年：库仑定律

（1）法国物理学家库伦
（2）库仑定律
（3）标志着电学成为一门独立学科
5．风筝实验
（1）英国的富兰克林
（2）闪电
（3）摩擦起电
6．1800 年：发明了伏达电池
（三）几何光学的发展
1．1621 年：光的折射定律
2．1655 年：光的衍射现象
（1）光的直进
（2）光的反射
（3）光的折射
（4）光的衍射
3．光的微粒说：牛顿
（1）1704 年出版《光学》：解释颜色本性
（2）光是弹性物质微粒流
（3）18 世界微粒说占统治地位
4．光的波动说：惠更斯
（1）对摆的研究
（2）光是具有冲量的振动

二、数学

变量数学时期：运动中的物体和变化着的量
（一）解析几何学的创立
1．用代数方法来研究几何学
（1）点和数
（2）曲线和方程
2．笛卡儿
（1）1637 年：《方法谈》及其附录《几何学》
（2）“普遍数学”的观念
（3）运动着的一点的坐标
（4）变量和函数
3．为微积分的发展铺平道路
（二）微积分的创立
1．牛顿“流数法”
（1）万有引力定律的证明问题
（2）无穷小的问题
2．德国莱布尼兹
3．微积分与极限理论
（三）实践中的应用
1．广泛性和

2．有效性

三、化学

（一）玻义耳：近代化学的奠基人

1.《怀疑派化学家》

（1）“实验决定一切”

（2）化学的任务：①寻找一般原理。②科学与技术、工艺的区别。

（3）“元素”的科学定义：混合物的基本成份，批判了①古希腊“四元素说”。②炼金术的“三元素说”。③医药化学派。

（4）：标志着化学确立为一门科学

2．化学分析

（1）利用化学性质为主的检验方法

（2）奠定了分析化学的基础

（二）燃烧的本质

1．波义耳：火微粒

2．贝歇尔：油状土

3．燃素说

（1）燃素是细小而活泼的微粒

（2）充斥于一切可燃物中

（3）物体燃烧时放出燃素

（4）18 世纪中叶还居于统治地位

4．氧气的发现

（1）18 世纪下半叶

（2）瑞典舍勒

（3）英国普里斯特利

（4）失燃素空气

5．拉瓦锡：氧化燃烧理论

（1）1777 年《燃烧概论》

①氧化燃烧学说。

②化学史上第一个科学的理论。

（2）1789 年《化学纲要》：

①推翻燃素说的各种实验依据。

②建立以氧为中心的氧化理论。

③化学质量守恒定律。

④第二张元素表：33 种元素。

（3）抛弃了燃素，却错误地把光素和热质当做元素

四、天文学

（一）天体力学的建立

1．1799 年：拉普拉斯《天体力学》

（1）第一次提出了天体力学的概念

（2）把牛顿的万有引力定律推广到整个太阳系

2．意义

（1）单纯描述天体位置的几何关系
（2）研究天体之间力的作用
（二）天体的起源和演化问题
康德－拉普拉斯星云假说
1．1755：康德《宇宙发展史概论》
（1）太阳系起源于原始星云
（2）引力和斥力
2．1876 年拉普拉斯
（1）原始星云：①巨大。②炽热。③缓慢转动。
（2）冷却收缩：转速加快
（3）分理处气环：断裂形成行星
（4）星云中心凝聚成太阳

五、近代地质学的产生

（一）地质学的产生
1．近代航海和地理大发现
2．自近代科学思想和方法
3．近代工业和采矿业的发展
（二）岩石成因的“水火之争”
1．水成论（德国魏尔纳）
2．火成论（英国赫顿）
3．促使实验地质学产生

六、生物学

（一）哈维血液循环的发现
1．哈维：英国医生
（1）出生于英国富商家庭
（2）1597 年毕业于剑桥大学
（3）留学于意大利帕多瓦大学：医学博士学位
①维萨里：亲自解剖的传统。
②伽利略：实验数学方法和力学自然观。
2．1628 年发表了《心血运动论》
（1）前人研究的基础
（2）解剖了 80 多种动物
（3）发现动物体内的血液循环系统
3．意义：使生物学成为科学
（1）推翻了盖伦的错误论述
（2）打击了基督教会的神学思想
（3）标志着科学生理学的诞生
（二）林耐建立生物分类学
1．生物分类法
（1）人为分类法
（2）自然分类法

2．林奈：瑞典博物学家

（1）1735 年《自然系统》：完整的分类系统。

（2）人为分类法的集大成者

（3）系统整理生物学资料，为进一步发展奠定基础

复习与思考题：

8、 哥白尼革命几位主要人物的贡献是什么？

9、 化学是怎样被确立为一门科学学科的？

10、 16-18 世纪欧洲对光和热的理解是怎样的？

拓展阅读书目：

1．吴国盛：《科学的历程》，湖南科学技术出版社，1995，第 285-426 页。

2．斯蒂芬•F•梅森（英）：《自然科学史》，上海外国自然科学哲学著作编译组译，上海人民出版社，1970，第 117-250 页。

3．W.C.丹皮尔（英）： 《科学史-及其与哲学和宗教的关系》，商务印书馆，1997，第 170-232 页。

4．科林• A •罗南：《剑桥插图世界科学史》，山东画报出版社，2010，第 264-334 页。

第六章　第一次技术革命

本章教学目的和基本要求：了解科学技术应用到现实所发挥出来的巨大作用，把握科学、技术和实践的关系，重点是英国工业革命的背景、纺织机械的革新、运输机的发明；难点是蒸汽机的技术改良

学时分配：2

第一节　技术发明与英国工业革命

一、十八世纪工业革命概述

（一）第一次技术革命时期

1．科学相对停滞

2．上一世纪科学成果转化成技术成果

（二）第一次技术革命

1．起点：纺织机械的革新

2．标志：蒸气机的发明和广泛使用

3．关键：机器取代人力

（三）意义

1．发端：英国

2．遍及：欧洲

3．影响：全世界

二、英国工业革命

（一）工业革命为什么率先从英国开始

1．前提：资产阶级政权的确立

2．条件

（1）大量资本和雇佣劳动力：①圈地运动。②殖民掠夺。③贩卖黑奴。

（2）技术条件：发达的工场手工业

（3）市场条件：①国外市场的扩大。②日益增长的市场需求。

（4）知识条件：自然科学的发展

（二）英国工业革命的进程

1．18 世纪 60 年代至 19 世纪中叶

（1）18 世纪 60 年代：棉纺织业开始革新

（2）19 世纪中叶：及其制造业的诞生

2．主要成就

（1）机器的应用：①棉纺织业开始革新。②棉纺厂的出现。

（2）解决动力问题：①瓦特改良蒸汽机。②能源为煤炭。③材料为钢铁。

（3）解决运输问题：①汽船。②火车。

3．时间进程

（1）工作机

（2）动力机
（3）运输机
（三）纺织机械的革新
1．英国旧式的纺纱机和织布机
（1）摇动脚踏纺车
（2）手工织布机
2．1733 年约翰·凯依发明了飞梭
（1）改进了织布技术
（2）纺纱便显得慢了
（3）1751 年皇家学会悬赏征求新式纺纱机
3．1764 年，詹姆斯·哈格里夫斯发明“珍妮机”
（1）木工兼纺纱工人
（2）立式的多滚轮纺纱机：①起初 8 根锭子。②后扩展成 80 根。
（3）特点：①人力。②纱精细但不结实。
4．60 年代末期水力纺纱机
（1）阿克莱特：
（2）特点：①水力。②纱结实但粗糙。
5．70 年代末期骡机
（1）克伦普顿
（2）特点：①水力。②几百个纱锭。③纱既精细又结实。
6．80 年代中期水力织布机
（1）卡特莱特
（2）特点：①水力。②提高织布效率 40 倍。
（3）大规模的织布厂出现
（四）蒸汽机的发明和革新
1．法国物理学家巴本
（1）近代第一个利用蒸汽作为动力的实验者
（2）1688 年，他用一个圆筒和活塞制造出简单的蒸汽机：没有实际应用
2．1698 年英国人塞维利发明了蒸汽抽水机
3．1705 年新的蒸汽抽水机：纽可门
（1）应用：①煤矿抽水。②农田灌溉。
（2）问题：①消耗大量的燃料。②只能用于抽水。
4．瓦特改良蒸汽机
（1）1736 年生于苏格兰工人家庭
（2）伦敦学徒：学习机械制造
（3）大学机修工：认识了物理学家布莱克，学到了许多热学知识
（4）分析出纽可门蒸汽机缺点：在汽缸内反复进行冷凝
（5）改进纽可门蒸汽机：①同汽缸分离的冷凝器。②自动控制装置。
5．蒸汽作为动力机
棉纺织业、毛纺织业、采矿业、冶金业、造纸业、印刷业、陶瓷业等部门
（五）运输机的发明
1．现存最古老的机动车
（1）1781 年

（2）法国陆军工程师居纽
（3）蒸气动力牵引车
2．第一艘蒸汽船
（1）1807 年
（2）美国人富尔敦
（3）美国“克莱蒙号”汽船
3．美国“大西方号”轮船
（1）1838 年
（2）单靠蒸汽机推动
（3）15 天横渡大西洋
4．蒸汽机车
（1）1826 年
（2）英国史蒂芬逊父子
（3）“火箭”号蒸汽机车
5．铁路的兴建

第二节　英国工业革命的影响

一、经济

（一）巨大的生产力
1．工场手工业
2．机器大工厂
3．英国成为“世界工厂”和世界第一工业强国
（二）迅速增长的财富

二、政治

（一）工业资产阶级进入政权中心
（二）阶级矛盾
1．资产阶级
2．无产阶级

三、生产方式

资本主义生产方式最终战胜封建生产方式
（一）导致经济地理和人口结构的变化
（二）人们思想观念和生活方式的变化
（三）推动科学技术的发展

四、科学技术

（一）加强科学技术的教育
（二）加大科学技术的研究投入
（三）给科学技术研究带来新的课题

五、世界格局

（一）海外殖民活动的加强
（二）西方先进、东方落后的世界格局

复习与思考题：

11、 英国工业革命的主要成就体现在哪些方面？
12、 瓦特对蒸汽机做了怎样的改良？

拓展阅读书目：

吴国盛：《科学的历程》，湖南科学技术出版社，1995，第 429-442 页。

第七章　十九世纪的自然科学

本章教学目的和基本要求：、了解自然科学的全面发展以及数学革命引发的对数学本性的思考，重点是能量守恒与转化定律的提出过程、热力学定律的提出、电磁理论的建立、原子-分子论的提出、灾变说和渐变说的争论、细胞学说的建立、；难点是非欧几何和进化论

学时分配：2

第一节　十九世纪自然科学领域的重大成就

一、数学革命的时期

（一）十九世纪的数论
（二）射影几何学的复兴
（二）非欧几何的产生
1．1800 年左右欧几里德几何学的情况
2．平行公理的研究
3．非欧几何的先兆
4．非欧几何的诞生
（1）罗巴切夫斯基几何
（2）黎曼几何
5．非欧几何的意义

二、物理学领域的成就

（一）能量守恒与转化定律的发现
（二）热力学基本定律的建立
1．蒸汽机的效率问题
2．热和功的相互转化及其定量关系
3．热力学三定律
（三）波动光学的建立
1．波动说和微粒说之争
2．“干涉实验”
3．“偏振现象”
4．光速的测定
（四）电磁理论的创立
1．奥斯特：电流的磁效应
2．安培：右手定则
3．法拉第：场和力线的概念
4．麦克斯韦：《电磁通论》

三、化学领域的成就

（一）原子－分子论的确立

1．原子论－英国道尔顿
2．气体化合定律－法国盖•吕萨克
3．分子的概念－意大利阿佛加德罗
（二）化学元素周期律的发现
1．约翰·纽兰兹
（1）英格兰业余化学家
（2）“八度定律”
2．俄国门捷列夫
（1）之前的元素排练方法
（2）灵感：北美洲的单人牌戏
（3）每七个元素一组：“周期表”
（三）有机化学的发展
1．第一次合成有机物
（1）德国维勒
（2）无机物：氰和氨水
（3）有机物：尿素

四、天文学

天体物理学时代
（一）发现海王星
（二）发现恒星视差

五、地质学

（一）灾变论
1．居维叶（1769—1832)
（1）法国比较解剖学家和古生物学家
（2）动物界的分类系统：动物四门
（3）洪水灾变说
2．居维叶作为“生物学界的独裁者”
（1）能言善辩的天才活动家和出色组织者
（2）打击进化论，推行灾变说
（二）渐变论
1．赖尔(1797—1875)
（1）生于苏格兰贵族家庭
（2）1819 年毕业于牛津大学
（3）由法律转向地质学
2．赖尔的地质渐变说
（1）先驱的影响：①赫顿的火成论。②拉马克的进化学说。
（2）实地考察：1828 年意大利西西里岛埃特纳火山
（3）1830-1833 年：《地质学原理》
（4）该书影响巨大，广为传播，使得地质渐变思想深入人心。
（三）地质年代表的制定

六、生物学

（一）细胞学说
（二）进化论
（三）微生物学
（四）现代医学

第二节　十九世纪自然科学三大发现

一、能量守恒与转化定律

（一）德国医生迈尔**(1814 一 1878)**
1．**较早发表能量守恒思想**
2．1840 年作为随船医生去爪哇
（1）病人的静脉血比预计的红得多
（2）思考体热的问题
（3）体力和体热：食物中的化学能
3．1842 年，《关于无机界力(能量)的说明》
（1）用推理方法提出了能量守恒与转化原理
（2）被认为是哲学论文而不被注意
（二）英国的焦耳 (1818—1889)
1．富有的啤酒酿造商
2．业余时间测定热量和机械工功
（1）1840 年测量电流通过电阻线所放出的热量
（2）焦耳定律：电能向热能转化的定量关系
3．研究成果的推广
（1）皇家学会拒绝发表其论文
（2）只得在一家报纸上全文发表
（3）1847 年在英国科学促进会的年会上作报告
（三）德国物理学家赫尔姆霍茨(1821—1894)
1．1847 年发表《力的守恒》
2．系统严密地阐述了能量守恒原理
（1）孤立系统中机械能的守恒
（2）能量的概念推广到热学、电磁学、天文学和生理学领域
（3）能量的各种形式相互转化和守恒
（4）永动机之不可能

二、细胞学说的建立

（一）细胞的发现
1．1665 年
2．英国物理学家胡克
3．显微镜下的“小室”
（二）细胞的认识
1．1838 年
（1）施莱登

（2）细胞是一切植物结构的基本单位

2．1839 年

（1）施旺

（2）细胞是一切动物结构的基本单位

3．意义

（1）细胞是一切有机体结构和发育的基本单位

（2）机体的发育，就是细胞的分化和形成的过程

（3）生物科学史上的重大综合

（4）生物进化论的基石

（三）细胞学说的应用：细胞病理学

1．德国生物学家微耳（1821—1902)

2．现代医学的基础

三、进化论

（一）产生的科学前提

1．比较解剖学的发展

2．胚胎学的发展

3．古生物学的发展

（二）拉马克的进化学说

1．18 世纪后期

2．用进废退

3．获得性状遗传

（三）**达尔文的进化论**

1．1859 年《物种的起源》

（1）相似的物种相互联系：起源同一祖先

（2）自然界优胜劣汰

（3）物种连续变化

2．核心思想：自然选择学说

（1）适者生存

（2）不适者淘汰

3．把人类饲养家禽的过程扩大到自然界

复习与思考题：

13、 为什么会产生非欧几何？

14、 为什么能量守恒与转化定律是比牛顿定律更基本的物理定律？

15、 十九世纪人们对生命的科学理解有哪些？

拓展阅读书目：

1．吴国盛：《科学的历程》，湖南科学技术出版社，1995，第 538-661 页。

2．斯蒂芬•F•梅森（英）：《自然科学史》，上海外国自然科学哲学著作编译组译，上海人民出版社，1970，第 369-482 页。

3．W.C.丹皮尔（英）： 《科学史-及其与哲学和宗教的关系》，商务印书馆，1997，第 283-428 页。

4．科林• A •罗南：《剑桥插图世界科学史》，山东画报出版社，2010，第 335-383 页。

5．M．克莱因：《古今数学思想》，上海科学技术出版社，1984 年，第三册 218-300 页

第八章　第二次技术革命

本章教学目的和基本要求：了解紧接着第一次技术革命的第二次技术革命，重点是第二次技术革命的背景、发电机、耐用灯泡、电话的发明，无线电通讯的建立、甘油炸弹的研制和人工合成染料的诞生、两次工业革命的对比；难点是内燃机工作原理和飞机飞行原理

学时分配：2

第一节　第二次技术革命兴起的条件

一、政治条件

（一）工业资产阶级进入政权中心
（二）资本主义制度进一步确立
（三）资本主义世界体系形成

二、市场条件

（一）国内统一市场的开辟
（二）国外市场的开拓

三、技术条件

（一）第一次工业革命的完成

四、科学理论基础

（一）电磁学理论的建立
（二）19 世纪各门自然科学发展

五、社会条件

（一）资本主义各国统治者重视科学技术的研究
（二）科学技术教育的重视

第二节　第二次技术革命的历程

一、电力的广泛应用

（一）发电机
1．德国人西门子
（1）德国“电子电气之父”
（2）提出发电机的工作原理
（3）发明第一台直流电动机
2．西门子其他贡献
（1）指南针式电报机

（2）改进过海底电缆
（二）耐用电灯泡
1．爱迪生
（1）1879 年 10 月 21 日
（2）试验过 1600 种耐热材料和 6000 种植物纤维
（3）用碳化的卷绕线作为灯丝：延续了约 45 个小时
2．“世界发明大王”。
（1）2000 余项发明：①第一所中央发电厂。②留声机。③活动电影机。
（2）1093 项美国专利
（3）创立通用电气公司
（三）其他
1．电车
2．电影放映机

二、新通讯手段的发明

（一）电话
1．贝尔
（1）电话之父
（2）世界上第一台可用的电话机的专利权
（3）创建了贝尔电话公司
2．贝尔的其他贡献
（1）制造了助听器
（2）改进了留声机
（3）创立了英国聋哑教育促进协会
（二）无线电通讯
1．马可尼
（1）实用无线电报通信的创始人
（2）1897 年，在伦敦成立“马可尼无线电报公司”。
（3）1909 年与布劳恩获诺贝尔物理学奖
2．建立电台

三、内燃机和新交通工具的创制

（一）内燃机和柴油机的诞生
1．1860 年勒努瓦：内燃机
2．1880 年奥托：四冲程内燃机
（1）吸入冲程
（2）压缩冲程
（3）燃烧冲程
（4）排气冲程
3．1892 年狄塞尔：柴油机
（二）汽车
1．1885 年摩托车
2．1886 年汽车

（三）内燃机车
（四）远洋轮船
（五）飞机
1．滑翔机
（1）15 世纪达·芬奇曾设计过一种扑翼机
（2）1809 年英国的乔治·凯利爵士试制了一架滑翔机：人被带起几米外
（3）1894 年德国李林塔尔成功地滑翔了 350 米（1150 英尺）远
2．1903 年莱特兄弟：飞机
（1）在美国经营一家自行车企业
（2）1890 年起研究鸟类、风筝以及滑翔机
（3）1903 年"飞行者号"试飞：持续 12 秒

四、化学工业的建立

（一）甘油炸弹
1．诺贝尔
（1）瑞典化学家、工程师、发明家、军工装备制造商和炸药的发明者
（2）一生拥有 350 项专利发明
（3）设立诺贝尔奖
2．液体炸药硝化甘油
（1）弟弟埃米尔和另外 4 人被炸死
（2）硝化甘油可以被干燥的硅藻土所吸附
3）改进黄色炸药和必要的雷管
（二）人工合成新染料
1．1856 年柏金：苯胺紫
（1）企图合成天然抗疟剂
（2）意外地制造出第一个合成染料－苯胺紫
（3）化学合成工业的发展
2．德国染料工业兴起

第二节　两次工业革命的对比

一、技术变革

（一）非蓄力驱动机器的使用
1．第一次工业革命：
（1）水力纺纱机
（2）骡机
（3）水力织布机
（3）火车机车
（3）汽船
2．第二次工业革命
（1）汽车
（2）内燃机车

（3）远洋轮船

（二）动力机

1．第一次工业革命：蒸汽机

2．第二次工业革命：发电机、内燃机

（三）新的更有效的原材料

1．第一次工业革命：铁

2．第二次工业革命：钢、氨、苯、染料；

（四）能源

1．第一次工业革命：煤

2．第二次工业革命：电力、石油

二、经济结构变革

（一）第一次工业革命

棉纺织业、采煤业、造船业、冶金业、机器制造业

（二）第一次工业革命

钢铁制造业、新兴的石油工业、电力工业、化学工业、汽车工业、电讯事业

三、经济组织变革

（一）第一次工业革命

工场 ——> 工厂

（二）第一次工业革命

工厂 ——> 垄断组织

复习与思考题：

1、两次工业革命的特点各有什么？

2、人类飞行的梦想是怎样是实现的？

拓展阅读书目：

1．吴国盛：《科学的历程》，湖南科学技术出版社，1995，第 662-710 页。

第九章　物理学革命及现代科学的产生

本章教学目的和基本要求：把握 20 世纪物理学革命的起因，了解量子力学和相对论的内涵，重点是以太漂移实验，X 射线、放射性、电子的发现，能量和光的量子化、光的波粒二象性、原子结构模型的演变；难点是黑体辐射和相对论。

学时分配：4

第一节　经典物理学的危机

一、世纪之交科学家眼中的物理学

（一）物理学：

1．牛顿力学无比强大的理论威力

2．光学、电磁学、力学的统一

3．许多物理学家认为人类对自然界的认识已经到了尽头

4．普朗克的老师的劝告

（二）开尔文的世纪回顾

1．19 世纪的最后一天

2．英国著名物理学家开尔文发表新年祝词

（1）回顾物理学的成就

（2）展望 20 世纪前景

二、物理学晴空的两朵乌云

（一）“以太漂移”

1．以太

2．如何判定以太存在

3．“迈克尔逊-莫雷实验”

（二）紫外灾难

（1）黑体：理想模型

（2）德国维恩的公式

（3）英国瑞利的公式

三、19 世纪末物理学三大实验发现

（一）关于阴极射线本性的争论

1．1856 年德国盖斯勒发明放电管：研究真空放电现象

2．1859 年德国普吕克发现了放电管阴极发出绿色辉光

3．876 年德国戈尔茨坦命名“阴极射线”

4．阴极射线的本性问题

（二）1895 年伦琴发现 X 射线

1．伦琴

（1）德国物理学家

（2）1901 年获首届诺贝尔物理学奖
2．X 射线
（1）1895 年 11 月 10 日
（2）做阴极射线实验
1．发现了一种新的辐射
2．能穿透不透明物质
（3）命名“X 射线”：未知的射线
3．英国克鲁克斯等人曾遇见过它
（三）1896 年贝克勒尔发现放射性
1．贝克勒尔
（1）法国物理学家
（2）1903 年获诺贝尔物理学奖
2．继续研究 X 射线
（1）伦琴发现的 X 射线：通过荧光材料所发出的荧光
（2）问题：是否所有荧光材料都能放出 X 射线？
（3）实验研究
（4）实验设想
（5）实验意外
（6）分析意外
（7）进一步分析
（8）结论：铀能自发辐射出能量
（9）居里夫人在 1898 年将之命名为放射性
3．居里夫人
（1）生于波兰，法国科学家
（2）寻找铀矿石中放射性极强的新元素
（3）1903 年获诺贝尔物理学奖
（4）1911 获得诺贝尔化学奖
（5）《我的信念》
4．放射性物质发现的意义
（1）放出的射线是什么？
（2）物质放出射线以后变成了什么？
（3）1899 年卢瑟福实验才揭晓
（四）1897 年汤姆生发现电子
1．汤姆生
（1）英国物理学家
（2）1906 年获诺贝尔物理奖
2．电子的发现
（1）1897 证实阴极射线在电场中偏转：带电粒子
（2）测定了阴极射线粒子的荷质比：小于氢原子质量
（3）原子不可再分？
（4）洛伦兹将它命名为“电子”
3．卓越的教师和科研事业领导人
七个助手获诺贝尔奖

（五）三大实验发现引发经典物理学的危机
基本概念和基本定律的危机
1．原子是不可分割？
2．元素是固定不变？
3．物质的质量与运动无关？
4．能量守恒？
5．质量和能量无关？

第二节　量子力学的诞生

一、黑体辐射与能量量子化

（一）黑体辐射
1．黑体加热时能辐射出各种波长电磁波
2．经典电磁理论的假定
（1）黑体辐射由带电粒子的振动发出的
（2）能量随波长单调变化
3．瑞利公式
（1）假定能量按自由度均分原则
（2）长波处比较接近实验曲线
4．维恩公式
（1）假定辐射波长的分布与 Maxwell 分子速度分布类似
（2）在短波处与实验较接近
5．经典理论解释不了有极大值的实验曲线
（二）普朗克能量量子化假设
1．普朗克
（1）1900 提出“能量子假说”
（2）辐射能不是连续的
（3）能量子：最小的、不可再分的能量单位
（4）普朗克常数 h＝6.626×10－34J•S
（5）黑体只能辐射频率为 ν，数值为 hν 的整数倍的**不连续**的能量。

二、光电效应与光的量子化

（一）光电效应
光照射在金属表面，使金属发射出电子的现象
（二）光电效应的实验特性
1．最小频率
2．电子的动能与光的频率相关
3．电子的数目和光的强度相关
（三）经典理论不能解释光电效应
1．光波的能量与其强度成正比，而与频率无关
2．只要光强足够，任何频率的光都应产生光电效应
3．光电子的动能随光强增加而增加，与光的频率无关。

（四）爱因斯坦的光子学说
1．光子：光能量的最小单位
（1）光子的能量：与频率成正比 ε=hν
（2）光子的质量：m＝hν/c2
（3）光子的动量：p＝mc＝hν/c＝h/λ
2．产生光电效应时的能量守恒
3．光子说圆满地解释光电效应

三、光的波粒二象性

（一）光的连续性：波动模型
1．衍射现象
2．干涉现象
（二）光的量子化：光子模型
光电效应
（三）光的波粒二象性
1．普朗克常数 h
2．波性的概念 ν 和 λ
3．粒性的概念 ε 和 p
4．波性和粒性的统一：ε=hν，p＝h/λ

四、原子结构模型的演变

（一）道尔顿模型(1803)
（二）汤姆生“西瓜式”模型
（三）卢瑟福核式模型
（四）玻尔电子分层排布模型
（五）量子力学模型

五、量子论的意义

第三节　相对论的提出

一、爱因斯坦传记

（一）童年
1．出生
（1）1879 年 3 月 14 日
（2）德国小城乌尔姆
（3）父母都是犹太人
（4）四岁多还不会说话
（5）六岁起学小提琴
2．幼年
3．小学
（二）中学

1．1888 年进入中学
2．数学很好，其他功课不怎样
3．对古典语言毫无兴趣
4．学校评价
（三）大学
1．第一次名落孙山
2．补习一年考入大学
3．仍然不是“好学生”
（四）专利局
1．不能留校
2．专利局
3．每周工作 40 多个小时
4．1905 年完成 6 篇论文，三篇成为物理学经典文献

二、相对论的提出

（一）牛顿的绝对时空观
1．空间距离与参考系无关
2．时间与参考系无关
3．时间与空间无关
4．绝对时空观的哲学内涵
（二）狭义相对论
1．相对性原理
（1）长度、质量、时间都是相对的
（2）伽利略变换和洛伦兹变换
（3）钟慢效应和尺缩效应
（4）运动的物体质量变大
2．光速不变原理
3．相对论的形象比喻
4．意义
（1）扩展了物理学的研究空间和应用领域
（2）开阔了人们的思维
（三）广义相对性
1．1916 年《广义相对论的基础》
（1）几何语言建立而成的引力理论
（2）统合了狭义相对论和万有引力定律
（3）引力被描述为时空的一种几何属性
2．广义相对论的两个基本原理
（1）等效原理：引力与惯性力等效
（2）广义相对论的相对性原理
3．广义相对论的观测
（1）水星近日点进动问题
（2）星光经过太阳的弯曲：日蚀时观测
（3）1919 年观测日全食。

三、爱因斯坦的其它贡献

（一）坚定的和平捍卫者
1．一战时:反战团体“新祖国同盟”
2．二战时：
（1）建议美国研制原子弹
（2）痛心原子弹对平民的伤害
（二）伟大的人格力量
1．平凡简朴的生活作风
2．谦逊善良纯朴的伟大人格
3．不崇拜偶像、漠视奖励的做人准则
（三）爱因斯坦的遗嘱
1．不发讣告
2．不举行公开葬礼
3．不建坟墓
4．不立纪念碑
（四）对爱因斯坦大脑的研究
1．右半球的顶下叶区域异常发达
2．大脑宽度超过普通人 15% 左右
3．缺少常人大脑中的一种皱沟

四、2005 年：世界物理年

（一）相对论诞生 100 周年
（二）爱因斯坦逝世 50 周年
（三）“2005 世界物理年”徽标含义

第四节　物理学照亮世界

一、自然科学史上的五次大综合

（一）天地运动的综合——万有引力
（二）电磁运动的综合——麦克斯韦方程组
（三）各种运动形式的综合——能量守恒与转化
（四）低速和高速运动的综合——相对论
（五）宏观与微观运动的综合——量子力学

二、力学的分类和应用范围

（一）宏观系统
1．低速运动：经典力学
（1）按观点分：①运动学。②动力学。③静力学。
（2）按对象分：①质点力学。②质点组力学。③刚体力学。④连续介质力学。
（3）按方法分：①矢量力学。②分析力学。
2．高速运动：相对论力学

（二）微观系统
1．低速运动：量子力学
2．高速运动：量子场论

三、20 世纪：物理学的世纪

（一）物理学是一切自然科学和技术科学的基础
（二）物理学作用于其他学科
催生分支科学和边缘交叉科学
（三）物理学也是工程技术的基础
1．经典力学和热力学：汽车、火车、飞机、火箭、人造卫星
2．电磁理论：电力技术、各种电器
3．量子力学：固体电子理论和半导体理论，现代信息技术
（四）物理学是现代物质文明的基础
物理学——>技术成果——>生产力——>财富

复习与思考题：（列每章章末）

1、为什么会产生量子力学？
2、相对论的主要内容有什么？
3、自然科学史上有过哪些理论的大综合？

拓展阅读书目：（列每章章末）

1．吴国盛：《科学的历程》，湖南科学技术出版社，1995，第 711-746 页。
2．斯蒂芬•F•梅森（英）：《自然科学史》，上海外国自然科学哲学著作编译组译，上海人民出版社，1970，第 510-529 页。
3．科林• A •罗南：《剑桥插图世界科学史》，山东画报出版社，2010，第 393-422 页。
4．A．爱因斯坦：《狭义与广义相对论浅说》，上海科学技术出版社，1964 年，第 1-95 页。

第十章　现代自然科学的发展（数理化）

本章教学目的和基本要求：了解现代数学、物理学和化学的发展概况，对一些具有特殊意义的突破有一定的认识，重点是数理逻辑、模糊数学、原子核物理学、元素周期表的重新认识、三大合成材料；难点是抽象代数和粒子间的基本作用力

学时分配：2

第一节　现代数学的发展

一、现代数学两个大的发展方向

（一）更加基础化、理论化、抽象化

（二）更好地应用于其他学科、更好解决现实问题

二、抽象代数

（一）研究对象：代数结构。比如群、环、域、模、矢量空间和代数

（二）主要内容：非特定的任意元素集合及其相关的代数运算

（三）应用：电子计算机技术、工程技术

（四）分支

1．群论、环轮、伽罗瓦理论、格论、线性代数

2．代数编码学

3．语言代数学

三、数理逻辑

（一）运用数学的方法来研究逻辑

（二）思想起源：莱布尼兹

（三）体系建立：布尔

（四）布尔代数

1．变量：0 和 1

2．运算：与、或、非

（五）分支

1．公理化集合论

2．模型论

（六）应用

1．自动化技术

2．电子计算机的逻辑设计

四、模糊数学

（一）研究对象：模糊性现象

（二）创始人：美国数学家查德

（三）问题：计算机与人的判断推理能力

（四）模糊集合与元素的隶属关系
（五）应用

五、运筹学

（一）规划论：在满足既定条件下，按一衡量指标寻求最优方案
（二）库存论：研究各类存贮活动的最优方案
（三）决策论：在不确定的情况下作出决策

第二节　现代物理学的发展

一、深入微观世界

（一）原子物理学：原子由原子核和电子组成
（二）原子核物理学：原子核由质子和中子组成
（三）粒子物理学：核子由夸克组成

二、原子核物理学的形成与发展

（一）质子和中子的发现与原子核结构模型
1．天然放射现象
（1）放射性元素
（2）射线：①α 射线。②β 射线。③γ 射线。
2．质子的发现
（1）1919 年
（2）卢瑟福用 α 粒子轰击氮原子核
（3）首次实现人工核反应
（4）发现质子的核反应方程
3．中子的发现
（1）卢瑟福预言
（2）1932 年英国查德威克发表论文
（3）小居里夫妇与中子
4．原子核模型
（1）原子核由质子和中子组成
（2）核子
（3）核素及其符号表示
5．原子核的衰变
（1）α 衰变
（2）β 衰变
（3）γ 衰变
（4）半衰期
（5）三种射线的性质和实质
（二）核反应的研究及核裂变的发现
1．人工放射元素的发现
2．原子核的人工转变

3．重核裂变的发现
（三）原子核能及其利用
1．核能
2．释放何能的两种方法
（1）重核裂变
（2）轻核聚变
3．重核裂变
（1）链式反应
（2）临界质量
4．重核裂变的应用
（1）原子弹
（2）核电站
5．轻核聚变
（1）氘-氚聚变
（2）磁约束装置---托卡马克装置

三、粒子物理学

（一）研究基本粒子规律的科学
（二）基本粒子：四大类
1．重子
（1）核子
（2）超子
2．轻子
（1）电子
（2）中微子
3．介子
（1）η 介子
（2）ρ 介子
4．相互作用子
（1）光子
（2）中间矢量玻色子
（三）基本粒子的相互作用
1．强作用力
2．弱作用力
3．电磁力
（四）强子和夸克

第三节　现代化学的发展

一、元素周期律的重新认识

（一）填补原先周期表的空缺
（二）发现许多额外的元素
（三）元素序数的重新认识

1．以前排序的依据：原子量大小
2．新的序数依据：原子核的正电荷数
（1）1913 年
（2）英国莫斯莱
3．最外电子层结构：元素的化学性质
4．元素周期律：化学元素的统一性

二、物理化学的建立与分析化学的发展

（一）物理化学
1．物理学的理论和方法来研究化学现象
2．结构化学
3．化学热力学
4．化学动力学
5．胶体化学
（二）分析化学
以仪器分析为主要手段

三、有机化学的新时代

（一）人工合成药物的研究
（二）天然有机物的研究
1．蛋白质分子的研究
2．DNA 的双螺旋结构模型
（三）有机高分子化合物的研究
1．合成橡胶
（1）1879 年第一次人工合成橡胶
（2）1910 年德国拜尔公司
（3）普通合成橡胶
（4）特种合成橡胶
2．合成纤维
（1）1913 年德国化学家科拉特首次合成纤维
（2）1938 年杜邦公司：尼龙 66 工厂
（3）四大纶
（4）仿生化
3．塑料
（1）赛璐珞
（2）酚醛塑料：最早合成的塑料
（3）聚四氟乙烯："塑料王"
（4）聚乙炔

复习与思考题：（列每章章末）

1、模糊数学又怎样的用途？
2、原子内部的粒子和作用有哪些？

3、传统三大合成材料是什么？

拓展阅读书目：（列每章章末）

1．李净、唐红洁，《新编现代科技概论》，中国政法大学出版社，2008，第 28-39 页。
2．M．克莱因：《古今数学思想》，上海科学技术出版社，1984 年，第四册 289-324 页。

第十一章　现代自然科学的发展（天地生）

本章教学目的和基本要求：了解现代天文学、地学和生物学的发展，对理论和经验上的重大突破有所认识，重点是射电望探测、微波背景辐射、现代恒星演化理论、大陆漂移说、海底扩张说、板块构造理论、DNA 双螺旋结构模型、基因工程；难点是宇宙大爆炸模型和孟德尔遗传定律

学时分配：2

第一节　现代天文学的发展

一、观测手段的进步

（一）射电望远镜的发展和应用
1．第一台射电望远镜
（1）1937 年
（2）美国的雷伯
2．太阳射电
（1）1942 年
（2）英国海伊
（3）使用军用的超高频雷达
3．射电探测工具
（二）六十年代天文学上的 4 大发现
（1）类星体
（2）脉冲星
（3）微波背景辐射
（4）星际有机分子

二、20 世纪 60 年代四大发现

（一）类星体
1．一般光学观测
2．分光观测
3．1993 年底确认的类星体
4．2002 年的星表
（二）脉冲星
1．1967 年被发现
（1）贝尔
（2）射电望远镜的信号
（3）有规律的脉冲信号
2．最初的认识
（1）外星人发的电报
（2）“小绿人一号”
3．快速自转的中子星

4．性质
（三）微波背景辐射
1．来自宇宙空间背景上的各向同性的微波辐射
2．20 世纪 60 年代初
（1）彭齐亚斯和威尔逊
（2）高灵敏度的号角式接收天线系统
（3）银晕气体射电强度
（4）消除不掉的背景噪声
（5）波长
（6）1978 年诺贝尔物理学奖金
3．对宇宙大爆炸学说的支持
（四）星际有机分子
1．星际羟基分子
2．90 年代末：120 多种
3．意义

三、两大基本理论

（一）现代恒星演化理论
1．恒星诞生
2．中年
3．老年
4．死亡
（二）宇宙大爆炸模型
1．“原始火球”
2．天文观测支持
（1）星系红移
（2）微波背景辐射

第二节　现代地学的发展

一、大陆漂移说

（一）魏格纳
1．大陆漂移说的创始人
（1）德国气象学家、地球物理学家、天文学家
（2）出生
（3）遇难
2．“地质浪漫诗人”
（二）大陆漂移假说
1．1915 年《海陆的起源》
2．用综合的方法来论证
（1）古生物的证据
（2）大地测量学

（3）地质学
3．泛大陆
4．遗留的问题

二、海地扩张说

（一）19 世纪海洋探险调查
1．1871 年“猎犬号”五年环球探险
2．1872 年“挑战者号”四年探险
（1）海洋学
（2）海洋生物学
（3）海洋地质学
3．二战后深海探测技术迅速发展
4．现代深潜器及探测设备
（1）摄象设备
（2）传感器
（3）采样器
（4）机械手
（二）赫斯
1．《海洋盆地的历史》：“地球的诗篇”
2．基本概念
（1）大陆地壳、洋壳
（2）地幔
（3）大洋脊
（4）海沟
（5）山脉或岛弧
3．内容
4．意义

三、板块构造理论

（一）各人独立提出
（1）美国的摩根
（2）英国的麦肯齐
（3）法国的勒皮顺
（二）板块构造理论
1．岩石圈
（1）侧向的不均一性
（2）分割成活动的板块
（3）板块内部稳定。
2．软流圈
3．板块划分
（1）1968 年勒皮顺六大板块
（2）大板块中划分小板块
3．板块的边界及其类型

（1）拉张型边界
（2）挤压型边界
（3）剪切型边界

第三节　现代生物学的发展

一、现代遗传学的发展

（一）孟德尔遗传定律及重新发现
1．孟德尔：现代遗传之父
（1）出生
（2）特罗保的预科学校
（3）奥尔米茨哲学院辍学
（4）修道院修道士
（5）成为神父
（6）维也纳大学学习
（7）豌豆进行杂交实验
（8）实验结果
2．《植物杂交实验》：遗传学两个基本定律
（1）性状分离定律
（2）独立分配定律
（3）当时未受到重视
3．孟德尔定律的重新发现
（1）1900 年被三人独立发现
（2）孟德尔工作被埋没的原因
4．遗传学基本概念的确立
（1）“遗传学”：英国生物学家贝特森
（2）“基因”：约翰逊
（二）摩尔根的基因理论
1．摩尔根
（1）美国遗传学家
（2）利用果蝇进行实验
（3）果蝇眼睛颜色的遗传现象
2．染色体遗传学说
（1）遗传变异与染色体的变化
（2）基因在染色体上呈直线排列
（3）第一个果蝇染色体连锁图
3．完整的基因遗传理论体系
（1）遗传学的物质基础》
（2）《基因论》
（3）1933 年的诺贝尔生理学和医学奖

二、分子生物学的诞生和发展

（一）分子生物学的诞生
1．现代物理学与现代生物学的结合
2．DNA 纤维的 X 射线衍射图
（1）1951 年
（2）生物物理学家威尔金斯
3．DNA 双螺旋结构模型的建立
（1）1953 年
（2）沃森和克里克
（3）开启了分子生物学时代
（4）1962 年的诺贝尔奖
4．遗传密码的破译
（1）三联密码假说
（2）合成多肽长链.
（3）密码辞典
（4）基因
（二）分子生物学的发展
1．基因工程
2．限制性内切酶
（1）20 世纪 70 年代
（2）内森、史密斯和阿尔伯
（3）为基因工程奠定了基础
3．DNA 的体外重组
（1）1973 年
（2）伯格
（3）按需要设计并改造物种
（4）创造自然界原先不存在的新物种
4．生物工程学

复习与思考题：

16、 宇宙大爆炸理论的观测依据有哪些？
17、 大地构造理论的三部曲是什么？
18、 遗传学和进化论有怎样的关系？

拓展阅读书目：

1．吴国盛：《科学的历程》，湖南科学技术出版社，1995，第 630-656、771-788 页。
2．斯蒂芬•F•梅森（英）：《自然科学史》，上海外国自然科学哲学著作编译组译，上海人民出版社，1970，第 499-509、530-542 页。
3．科林• A •罗南：《剑桥插图世界科学史》，山东画报出版社，2010，第 384-393 页。

期末复习答疑及考试阶段

答疑学时分配：2 学时

本教学环节遇节假日时也可作为机动课时进行调停课。

考试学时分配：2 学时

《文科高等数学》

教学大纲(2012 年)

刘淑环　编写

目 录

第一部分 前言 6
一、课程基本信息 6
二、教学目的与内容简介 6
三、教学方法 6
四、教学内容、学时分配 6
五、课程安排及组织形式 7
六、课程考核 7
七、参考教材 7
八、课程网站 7
九、大纲编写 7
第二部分 教学内容 8
第一讲 漫话数学 8
本讲知识点： 8
本讲基本要求： 8
本讲重点与难点： 8
第一节 课程概述 8
一、《文科高等数学》课程介绍 8
二、《文科高等数学》课程定位 8
三、怎样学习《文科高等数学》 8
第二节 数学的理性思维 8
一 、 对政策的理性分析 8
二、理性的逻辑推断 8
三、数学推理与法律裁判 9
第三节 数学悖论、数学猜想与数学奖项 9
一、悖论与危机 9
二、数学史上的三次危机 9
三、两个著名的数学猜想（课外自学） 9
四、几个数学奖项（课外自学） 9
第二讲 集合与函数应用—具体问题符号化结构化抽象化 10
第一节 集合---数学的基础 10
一、集合的概念及其运算 10
二、有穷集合与无穷集合 10
第二节 函数——微积分研究对象 10
一、函数的概念 10
二、函数的性质 11
三、反函数 11
四、复合函数 11
五、分段函数 11
六、初等函数 11

第三节　经济学中常见的几类函数......13
一、成本函数、收益函数及利润函数......13
二、需求函数与供给函数......13
三、如何构建数学模型......13
第三讲　无穷与极限—有限与无限，动中有静，以不变应万变......15
第一节　极限方法概述......15
一、芝诺悖论之极限分析......15
二、复利计息之极限分析......15
三、概率极限之分析......15
第二节　极限的定义......15
一、数列极限......15
二、函数的极限......16
第三节　极限计算......17
一、极限的四则运算法则......17
二、极限计算方法......17
第四讲　极限与连续—连续和谐，居安思危......19
第一节　两个重要极限......19
一、极限存在的两个准则......19
二、两个重要极限......19
三、连续复利......20
第二节　无穷小量与无穷大量......20
一、无穷小量......20
二、无穷大量......21
三、无穷小量与无穷大量的关系......21
第三节　函数连续——极限应用......21
一、函数在某一点连续......21
二、函数 $f(x)$ 在区间上连续......22
三、函数间断点及其分类......22
四、闭区间上连续函数的性质......22
第五讲　导数与微分—变量变化速度与局部改变量......24
第一节　导数的概念——函数的局部变化率......24
一、导数概念引例......24
二、导数定义......25
三、导数的几何意义......25
四、函数在一点的左右导数......26
五、可导与连续的关系......26
第二节 导数的运算法则......26
一、函数和、差、积、商求导法则......26
二、复合函数求导法则......26
三、隐函数求导法则......26
四、取对数求导法......26
五、分段函数求导......27

六、基本初等函数的求导公式小结 27
七、高阶导数的定义 27
八、应用 MATLAB 语句求导数（课外自学） 27
第三节　函数微分 28
一、微分的定义 28
二、微分运算法则 28
三、微分的近似计算 29
第六讲　导数应用（1）—局部与整体的连接 30
第一节　微分中值定理 30
一、罗尔(Rolle)定理 30
二、拉格朗日(Lagrange)中值定理 30
第二节　洛必达法则 31
一、$\frac{0}{0}$型不定式极限的洛必达法则 31
二、$\frac{\infty}{\infty}$型不定式极限的洛必达法则 31
三、其他未定式的极限 31
第七讲　导数应用（2）—函数性态分析，边际分析、弹性分析 33
第一节　函数性态分析 33
一、函数单调性与极值问题 33
二、曲线的凹向与拐点 34
第二节　函数图形的作法 34
一、曲线渐近线 34
二、曲线做图的一般作法 35
第三节　导数在经济学中的应用 35
一、边际函数（边际分析）——函数的绝对变化 35
二、函数的弹性（弹性分析）——函数的相对变化率 36
第八讲　不定积分—微分的逆运算问题，逆向思维的培养 37
第一节　不定积分的概念 37
一、原函数的概念 37
二、不定积分的定义 37
三、不定积分的几何意义 37
四、不定积分的性质 38
五、基本积分公式 38
第二节　换元法——不定积分的计算方法（1） 38
一、第一类换元法（凑微分法） 38
二、第二换元积分法 39
第三节　分部积分法——不定积分的计算方法（2） 39
一、分部积分法 39
二、用 MATLAB 求不定积分（课外自学） 40
第九讲　定积分—求总量问题 41
第一节　定积分的概念 41
一、定积分的概念引入 41

二、定积分的定义......42
三、定积分的性质......42
第二节　牛顿莱布尼兹公式——定积分的计算......43
一、变上限积分函数的定义......43
二、原函数存在定理......43
三、定积分的计算......44
第三节　广义积分——极限方法的应用（课外自学）......44
一、无限区间上的广义积分......44
二、无界函数的积分......45
第四节　定积分的应用......46
一、曲边梯形的面积计算......46
二、旋转体的体积计算......46
三、已知平行截面面积的立体的体积......46
第十讲　概率初步(1)——偶然中蕴含必然，直观判断与理性分析......47
第一节　概率问题概述......47
一、各行业中的概率问题......47
二、概率统计的发展历史......47
三、有趣的概率问题......47
第二节　随机事件的关系及其运算......47
一、随机事件的关系......47
二、随机事件的关系的运算规律......48
第三节　随机事件的概率定义及计算......48
一、统计概率......48
二、古典概型......48
三、概率的公理化定义......49
四、概率性质......49
五、随机事件概率计算实例......49
第十一讲　概率初步(2) ——随机性问题的概率计算与理性分析......50
第一节　条件概率与乘法公式......50
一、条件概率的定义......50
二、概率乘法公式......50
三、随机事件独立......50
四、加法公式与乘法公式应用实例......50
第二节　全概公式和贝叶斯公式......51
一、全概率公式——由原因推结果......51
二、贝叶斯公式——已知结果求原因......51
三、全概公式与贝叶斯公式应用实例......51
四、概率推理案例分析......51
第三节　贝努利试验与二项概型......51
一、n 重贝努利试验......51
二、二项概型......52
三、二项概型应用实例......52

第十二讲　随机变量分布 53
第一节　随机变量及其概率分布 53
一、随机变量的概念 53
二、离散型随机变量及其分布 53
三、连续型随机变量及其分布 54
第二节　几个常见随机变量的概率分布 54
一、二项分布 54
二、泊松分布 54
三、指数分布 55
四、正态分布 55
第十三讲　随机变量的数字特征——数学期望与方差 57
第一节　数学期望 57
一、数学期望的概念 57
二、数学期望值的性质 57
三、随机变量函数的数学期望 57
四、数学期望的应用 58
第二节　随机变量的方差 58
一、方差的概念及其简化计算公式 58
二、方差的性质 58
三、常用随机变量的数学期望与方差 58
第三节　风险型问题的决策分析 58
一、民事案件的诉讼与和解方式的选择 58
二、上市公司经营行为的模式选择 58
三、不同就业计划的决策分析 58
四、新型产品的投资生产决策分析 58
第三部分　课堂外教学活动 59
一、与数学有关的优秀影视欣赏 59
二、与数学软件应用和科技论文写作有关的讲座 59

第一部分　前言

一、课程基本信息

课程名称：文科高等数学　　英文名称：Advanced Mathematics for Liberal Arts Students
课程编号：509010252　　所属领域：自然科学
开课学期：春秋两学期　　先修课程：高中数学
总 学 时：36　　周 学 时：3（12 周)
学　　分：2
开课单位：科学技术教学部

二、教学目的与内容简介

《文科高等数学》是我校为政法人文等专业开设的自然科学类通识主干选修课程，其开设目的为：以高等数学知识为载体，一方面注重培养学生以理性的方式认识自然世界，思考人类与自然之间的关系，另一方面培养具有科学素养的公民，使学生可以参与社会性科学议题的讨论，并能够以日常科学思考的方式解决生活中的问题。

本课程主要讲授三部分内容：漫谈数学（数学推理、数学思维、数学悖论、数学危机等）；一元微积分（集合、函数、极限、连续、一元微分方法、一元积分法等）；概率论初步（概率、随机变量、数字特征等）。

三、教学方法

在课堂教学中，尽量采用多媒体教学，多用图形和实例引入来说明和描述微积分与概率论中的一些主要定义和概念。用问题驱动法逐步展开教学，把学生吸引到教学内容中去，并引导学生讨论问题，调动学生听课的积极性，锻炼学生的表达能力，提高课堂教学效率。在讲授传统内容时，应注意运用现代数学的观点、概念、方法以及术语等符号，加强与其它不同分支之间的相互渗透，不同内容之间的相互联系，淡化运算技巧训练。传授高等数学知识的同时，通过各个教学环节逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力和自学能力，还要特别注意培养学生综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力。

四、教学内容、学时分配

模块顺序	模块内容	模块具体知识	大致安排（学时）
1	课程前言；漫话数学	数学推理、数学思维、数学悖论、数学危机等	3
2	一元微积分	集合、函数、极限、连续	6
		一元微分方法	9
		一元积分方法	9
3	概率统计初步	概率论初步	9
4	课外活动	科技论文写作讲座；公式编辑器和 MATLAB 软件使用；数学优秀影视欣赏、等（灵活安排）	6（教学外）

根据上述框架，安排教学内容为《文科高等数学十二讲》。

五、课程安排及组织形式

《文科高等数学》课程为全校通识选修主干课程，在春、秋两学期轮流开设，计划每学期至少开设 1 个班级，选修上限 150 人。每次 3 课时（3 小节），共 12 教学周，36 课时。

六、课程考核

课程考核采取百分制，以平时成绩（10 分）、写作（40 分）、卷面考核（50 分）的方式综合评定。课程论文题目可以是学生就高等数学中某一认识较深或较感兴趣的问题抒发见解，也可以按教师指定题目进行研究，既可以独自完成，也可以合作完成（最多 3 人，需要明确各自分工）。

七、参考教材

1.《大学文科数学》（第二版）：张国楚，徐本顺，王立冬，李祎主编
2.《数学方法与应用》：刘淑环、刘崇丽、闫红霞、肖滢编著，清华大学出版社
3.《高等数学》（经济。法律专业）：刘淑环、刘崇丽、闫红霞编著，华文出版

八、课程网站

《文科高等数学》课程网址：http://ge.cupl.edu.cn/gdsx（或从中国政法大学大学生素质教育网 http://ge.cupl.edu.cn 进入，点击“博学近思”，再点击“文科高等数学”即可进入课程网站。）

九、大纲编写

本课程大纲由刘淑环老师编写，大纲编写过程中得到了本课程教学团队的大力支持。在实际教学中，由于学生情况不同，在实际教学过程中可能会在学时分配和内容详略方面有所调整。

第二部分　教学内容

第一讲　漫话数学

本讲知识点：

课程介绍，数学思维，数学推理，数学悖论，数学猜想，数学危机

本讲基本要求：

1．理解课程定位；
2．理解培养数学思维、理性判断的重要性；
3．理解数学悖论产生原因及其作用；
4．了解数学史上的三次数学危机及其启示；
5．理解数学猜想的重要

本讲重点与难点：

重点：培养数学的理性思维，用数学思维解决问题的意识
难点：培养数学的理性思维，用数学思维解决问题的意识
学时分配：3 学时
教学内容：

第一节　课程概述

一、《文科高等数学》课程介绍

二、《文科高等数学》课程定位

三、怎样学习《文科高等数学》

第二节　数学的理性思维

一 、 对政策的理性分析

（一） 理性思维及作用
（二） 数学计算意识
（三） 比例分析的思考

二、理性的逻辑推断

（一） 精明的理性人——经济人
（二） 强盗分赃
（三） 报数游戏
（四） 运算律的应用

三、数学推理与法律裁判

第三节　数学悖论、数学猜想与数学奖项

一、悖论与危机

（一）无法执行的规则
（二）芝诺悖论
（三）康托尔悖论
（四）罗素悖论

二、数学史上的三次危机

（一）数学悖论的作用
（二）希帕索斯悖论与第一次数学危机
（三）贝克莱悖论与第二次数学危机
（四）罗素悖论与第三次数学危机

三、两个著名的数学猜想（课外自学）

（一）"哥德巴赫猜想"
（二）"庞加莱猜想"

四、几个数学奖项（课外自学）

（一）菲尔兹奖（Fields prize）
（二）沃尔夫数学奖（Wolf　Prize）
（三）阿贝尔奖（Abel　prize）

课外阅读书目：

（1）　《数字追凶》——美剧中的数学破案；
（2）　《数字唬人》——用常识看穿无所不在的数字陷阱；
（3）　《牛津迷案》；
（4）　《数学丑闻》——光环底下的阴影；
（5）　《数学恩仇录》——数学家的十大论战；
（6）　《笛卡尔的秘密手记》；

思考题：

（1）　就"提出问题与解决问题的重要性"谈体会；
（2）　选读一本课外阅读书目，理解并体会其中的数学知识及所体现的思想；
（3）　统计数学奖项获奖人的国籍分布，并就此谈感想；
（4）　囚犯如何取豆？

5 个囚犯，分别按 1-5 号在装有 100 颗绿豆的麻袋抓绿豆，规定每人至少抓一颗，而抓得最多和最少的人将被处死，而且，他们之间不能交流，但在抓的时候，可以摸出剩下的豆子数。问他们中谁的存活机率最大？

说明：（a）他们都是非常聪明的人；（b）他们的原则是先求保命，再去多杀人；不能保命的话，也要多杀人；（c）100 颗不必都分完；（d）若有重复的情况，则也算最大或最小，一并处死 (中间数的重复不算)。

第二讲　集合与函数应用—具体问题符号化结构化抽象化

本讲知识点：

集合概念及其运算，无穷集合，函数概念，函数的几种简单性质，反函数，复合函数，初等函数，分段函数，经济学中常见的几类函数。

本讲基本要求：

1．理解函数的概念，会求函数的定义域，会建立简单应用问题的函数；

2．了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性；

3．了解显、隐函数、反函数分段函数的概念，理解复合函数的概念；

4．掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念；

5．了解经济学中常见的几类函数并会应用。

本讲知识点、重点与难点：

重点：熟悉基本初等函数的图像及性质，复合函数的概念及分解

难点：基本初等函数的图像及性质，复合函数的分解

学时分配：3 学时

教学内容：

第一节　集合---数学的基础

一、集合的概念及其运算

（一）集合的概念：集合(set)；集合分类；集合表示方法；子集；数集分类

（二）集合的运算：并集；交集；差集；余集；运算规律

（三）区间和邻域

二、有穷集合与无穷集合

（一）从有限到无限

（二）希尔伯特旅馆问题

（三）无穷悖论

（四）一一对应

（五）无穷的势、无穷的级

第二节　函数——微积分研究对象

一、函数的概念

若 D 是一个非空实数集合， 设有一个对应规则 f，使对每一个 $x \in D$， 都有一个确定的实数 x 与之相对应， 则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x) \quad x \in D$。其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，也可以记作 $D(f)$。

二、函数的性质

（一）奇偶性

1．奇函数：给定函数$y=f(x)$，其定义域$D(f)$关于原点对称，如果对所有的$x\in D(f)$，有$f(-x)=-f(x)$，则称$y=f(x)$为奇函数。奇函数图形关于原点对称。

2．偶函数：给定函数$y=f(x)$，其定义域$D(f)$关于原点对称，如果对所有的$x\in D(f)$，有$f(-x)=f(x)$，则称$y=f(x)$为偶函数。偶函数图形关于 y 轴对称。

（二）周期性

对于函数$y=f(x)$，如果存在正的常数T，使得$f(x+T)=f(x)$恒成立，则称此函数为周期函数。T为$y=f(x)$的周期。若T为函数$y=f(x)$的一个周期，则$kT\,(k\in Z^{+})$也是$y=f(x)$的周期.通常我们说周期函数的周期指的是函数的最小正周期.

（三）单调性

如果函数$y=f(x),x\in D$，对区间(a,b)内的任意两点x_1和x_2，当$\boldsymbol{x}_1<\boldsymbol{x}_2$时，总有$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)<\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$，则称函数$y=f(x)$在区间$(a,b)$内是单调增加的；当$\boldsymbol{x}_1<\boldsymbol{x}_2$时，总有$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)>\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$，则称函数$y=f(x)$在区间$(a,b)$内是单调减少的。

严格单调函数的图像与任意平行于横轴的直线至多有一个交点。

（四）有界性

设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果存在正数M对于任意的$x\in(a,b)$，都有$|f(x)|\le M$，则称函数$y=f(x)$在(a,b)内是有界的；如果不存在这样的正数M，则称函数$y=f(x)$在(a,b)内是无界的。

注意:同一函数在自变量的不同范围上的有界性不一定相同。

三、反函数

（一）反函数定义

设$y=f(x)$是定义在$D(f)$上的一个函数，值域为$Z(f)$。如果对于每个$y\in Z(f)$，有一个确定的且满足$y=f(x)$的$x\in D(f)$与之对应，其对应规则记作f^{-1}，这个定义在$Z(f)$上的函数$x=f^{-1}(y)$称为$y=f(x)$的反函数，或称它们互为反函数。反函数的定义域为原函数的值域。

（二） 反函数性质

1．定义域与值域之间是一一对应关系；

2．函数在某个区间若为单调函数，则函数在该区间必存在反函数。

四、复合函数

设函数$y=f(u)$的定义域为$D(f)$，若函数$u=\varphi(x)$的值域为$Z(\varphi)$， $Z(\varphi)\cap D(f)$非空，则称$y=f(\varphi(x))$为复合函数。x为自变量，y为因变量，u称为中间变量。

五、分段函数

在定义域的不同部分用不同表达式表达的函数。

六、初等函数

（一）基本初等函数

1．常函数：$y=C$。定义域为一切实数，其图形是一条平行于 x 轴的直线。

2．幂函数： $y=x^{\alpha}$ (α为任何实数)

3．指数函数： $y=a^x \quad (a>0,a\neq 1)$

指数函数的定义域为（-∞，+∞），值域为（0，＋∞）.当$a>1$时，函数严格单调增加；当$0<a<1$时，函数严格单调减少。函数的图形都过（0，1）点， $y=a^x$与$y=a^{-x}$图形关于 y 轴对称。

$y=e^x$是工程上常用的指数函数，常数 e=2.7182818…

4．对数函数： $y=\log a^x \quad (a>0,a\neq 1)$

对数函数的定义域为（0，＋∞）,值域为（-∞，+∞）.当$a>1$时，函数严格单调增加;当$0<a<1$时，函数严格单调减少，函数图形都过（1，0）点。

以 e 为底的对数称为自然对数，记作$y=ln\,x$。

5．三角函数：

（1）正弦函数$y = \sin\ x$。定义域为（-∞，+∞），值域为〔-1，1〕，它是以 2π 为周期的有界的奇函数。

（2）余弦函数$y = \cos\ x$。定义域为（-∞，＋∞），值域为〔-1，1〕，它是以 2π 为周期的有界的偶函数。

（3）正切函数$y = \tan\ x$。定义域为$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2} \quad (k\in Z)$，它是以 π 为周期的单调增加的奇函数（在一个周期内）。

（4）余切函数$y = \cot\ x$。定义域为$x\neq k\pi \quad (k\in Z)$,它是以 π 为周期的单调减少的奇函数（在一个周期内）.

此外，还有正割函数$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$和余割函数$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，其图形和性质从略。

6．反三角函数

（1）反正弦函数$y=arcsin\,x$,定义域为〔-1，1〕，值域为$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，有界，单调增加，奇函数。它是正弦函数$y = \sin\ x$在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$上的反函数.

（2）反余弦函数$y=arccos\,x$，定义域为〔-1，1〕，值域为$(0,\pi)$，有界，单调减少，偶函数。它是余弦函数$y = \cos\ x$在$(0,\pi)$上的反函数.

（3）反正切函数$y=arctan\,x$，定义域为（-∞，+∞），值域为$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$。有界，单调增加，奇函数。它是正切函数$y = \tan\ x$在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$上的反函数。

（4）反余切函数$y=arc\,cot\,x$定义域为（-∞,+ ∞），值域为$(0,\pi)$，有界，单调减少，它是余切函数$y=cot\,x$在$(0,\pi)$上的反函数.

（二）初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或复合运算得来的、并且用一个式子表示的函数。凡不是初等函数的函数，我们都称之为非初等函数。高等数学讨论的函数主要是初等函数.

第三节　经济学中常见的几类函数

一、成本函数、收益函数及利润函数

（一）成本函数

总成本函数为$C=C_0+p(x)$。其中C_0为固定成本，指不受产量变化影响的成本，包括厂房、设备、管理费等。$p(x)$表示可变成本，指受产量变化影响的成本，是产量的函数，包括原材料、燃料、工人工次等，若p表示单位可变成本，则$p(x)=px$

（二）收益函数

收益是指销售一定产品后所得的收入，由单价和销售量决定的，常用$R(x)$表示，x表示销量。若单价是销售量的函数，则收益是销售量的函数；若销售量是单价的函数，则收益是单价的函数。

（三）利润函数

收益函数与成本函数之差就是利润函数。若成本与收益都是产量的函数，则利润函数为$L(x)=R(x)-C(x)$。

当$\boldsymbol{L(x)}>0$，即$\boldsymbol{R(x)>C(x)}$时，企业盈利；当$\boldsymbol{L(x)}<0$，即$\boldsymbol{R(x)<C(x)}$时，企业亏本；

当$L(x)=0$，即$R(x)=C(x)$时，企业保本，并称此时的x_0为盈亏临界点。

二、需求函数与供给函数

（一）需求函数

产品需求量与产品价格之间的函数关系为需求函数，由$\boldsymbol{Q=Q(p),p}>0$表示。其中$\boldsymbol{Q}$为商品的需求量，$\boldsymbol{p}$为商品的价格。

一般地，需求量随价格上涨而减少，故需求函数通常是价格单调递减函数。

（二）供给函数（供应函数）

产品供给量与产品价格之间的函数关系为供给函数，由$S=S(p)$表示。其中S为商品的需求量，p为商品的价格。

一般地，商品供给量随商品价格上涨而增加，故商品供给函数通常是商品价格的单调递增函数。

（三）供需平衡分析

随着价格的上涨，需求下降，供给增加，到一定时候二者达到平稳，此时的价格p_0称为均衡价格，即$Q(p_0)=S(p_0)$。

当$Q(p)>S(p)$时，供不应求，商品的价格就会有上涨的趋势；

当$Q(p)<S(p)$时，供过于求，商品的价格就会有下跌的趋势。

三、如何构建数学模型

（一）关于人生追求的模型构建探讨

（二）人口模型构建

（三）利息问题

在金融业务中，有两种息方式：单利和复利。

1．单利计算

只在本金上计算利息。p为本金，i为计息期的利率，n为计息期数，则n期的利息为$I=pin$，本利和为$A=p+I=p(1+in)$。

2．复利计算

不仅在本金上计算利息，而且所生利息也计算利息。设p为本金，i为计息期的利率，n为计

息期数，若每期结算 1 次，则 n 期末的本利和为 $A = p(1+i)^n$，n 期利息为

$I = A - p = p[(1+i)^n - 1]$。

若每期结算 m 次，则 n 期本利和为 $A_m = p(1+\frac{i}{m})^{mn}$，$n$ 期利息为

$I_m = A - p = p[(1+\frac{i}{m})^{mn} - 1]$。

3.投资分析:终值现值转化

思考题：

（1） 体会如何就实际问题进行数学建模；并举例说明；

（2） 富兰克林利用放风筝而感受到电击，从而发明了避雷针。这位美国著名的科学家死后留下了一份有趣的遗嘱：“……一千英磅赠给波士顿的居民，如果他们接受了这一千英磅，那么这笔钱应该托付给一些挑选出来的公民，他们得把这些钱按每年 5％的利率借给一些年轻的手工业者去生息。这些款过了 100 年增加到 131000 英磅。我希望那时候用 100000 英磅来建立一所公共建筑物，剩下的 31000 英磅拿去继续生息 100 年。在第二个 100 年末了，这笔款增加到 4061000 英磅，其中 1061000 英磅还是由波士顿的居民来支配，而其余的 3000000 英磅让马萨诸塞州的公众来管理。过此之后，我可不敢多作主张了！” 区区的 1000 英磅遗产，竟立下几百万英磅财产分配的遗嘱，是“信口开河”，还是“言而有据”呢？通过计算作出自己的判断。

第三讲　无穷与极限—有限与无限，动中有静，以不变应万变

本章的知识点：

数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限和右极限，极限的四则运算

本讲基本要求：

1．理解数列极限的直观定义，掌握数列极限定义的刻画方式。

2．理解函数极限的直观定义，掌握函数极限定义的刻画方式。

3．理解左极限和右极限的，掌握函数极限存在的条件。

4．理解无穷大量与无穷小量的概念，掌握无穷大量与无穷小量的关系和性质。掌握无穷小量的阶的比较方法。

5．熟练掌握极限运算法则和计算方法。

重点：极限的定义和运算法则

难点：函数极限的概念

学时分配：3

教学内容：

第一节　极限方法概述

一、芝诺悖论之极限分析

二、复利计息之极限分析

三、概率极限之分析

第二节　极限的定义

一、数列极限

（一）数列定义

一个定义在正整数集合上的函数 $y_n = f(n)$（称为整标函数），当自变量 n 按正整数 1，2，3，……依次增大的顺序取值时，函数值按相应的顺序排成一串数：$f(1), f(2),\cdots f(n)\cdots$ 称为一个无穷数列，简称数列。

（二）数列的单调与有界

（三）数列极限定义

1.数列极限的 ε—N 定义

设 $\{x_n\}$ 是一个数列，a 是一个确定的数，若对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathrm{N}$，使得 $n > N$ 时，

都有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，a 称为它的极限。

记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或者 $x_n \to a(n \to \infty)$。

注意：（1）ε 的任意性。ε 的作用在于衡量 x_n 和 a 的接近程度。

（2）N 的相应性。N 依赖于 ε，但并不是由 ε 唯一确定。

2.几何意义：所有下标大于 N 的 x_n 都落在 a 的 ε 邻域内，而在这个邻域之外，至多有 N（有限）

个项。

3.数列极限的性质定理

（1）唯一性定理：若数列{x_n}收敛，则它的极限值是唯一的。

(2)有界性定理：若数列{x_n}收敛，则它为有界数列。

(3)收敛子列定理：数列收敛的充要条件是其任意子列都收敛并且具有相同的极限。

二、函数的极限

（一）当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

1.定义：设 $f(x)$ 为定义在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上的函数，A 是一个定数，若 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0$，使得当 $\left|x\right|>M$，时,恒有 $\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$ 成立，则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于正无穷时极限存在，并以 A 为极限。记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

2.几何意义

当 $\left|x\right|>M$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，表示在直线 $x=-M,x=M$ 的两侧，曲线 $y=f(x)$ 整个地落在以 $y=A$ 为中心，2ε 为宽度的带型区域内。

类似地可定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=A,\quad \lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=A$。

3.定理: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

4.水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或者 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，则称直线 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线。

（二）当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限

1.定义：如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 以常数 A 为极限。

记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或者 $f(x)\to A\,(x\to x_0)$

说明：

（1）ε 刻画 $f(x)$ 与常数 A 的接近程度，δ 刻画 x 与 x_0 的接近程度。

（2）$0<|x-x_0|<\delta$，不考虑 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义。

2.几何意义

对于任意给定的正数 ε,不论 ε 多么小,即不论 $y=A-\varepsilon$ 与 $y=A+\varepsilon$ 间的带形区域多么狭窄,总可以找到 δ >0,当点 $(x,f(x))$ 的横坐标 x 进入 $\left(x_0-\delta,x_0\right)\cup\left(x_0,x_0+\delta\right)$ 时,纵坐标 $f(x)$ 全部落入区间 $\left(A-\varepsilon,A+\varepsilon\right)$ 之内.此时 $y=f(x)$ 的图形处于带形区域之内,ε 越小,带形区域越窄。

3.左右极限（单侧极限）

（1）左右极限定义

当 $0<x-x_0<\delta$，表示 x 大于 x_0 而趋于 x_0 时，即 x 从 x_0 的右侧趋近于 x_0，用 $x\to x_0{}^{+}$ 表示，此时称常数 A 为函数 $f(x)$ 的右极限。记作 $\lim\limits_{x\to x_0^{+}}f(x)=A$。

当 $0<x_0-x<\delta$，表示 x 小于 x_0 而趋于 x_0 时，即 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0，用 $x\to x_0{}^{-}$ 表示，此时称常数 A 为函数 $f(x)$ 的左极限。记作 $\lim\limits_{x\to x_0^{-}}f(x)=A$。

（2）定理

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是：左极限和右极限都存在且相等。即

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

（三）函数极限的局部性质

1.唯一性定理：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则它只有一个极限。

2.有界性定理：

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某个空心邻域，使得 $f(x)$ 在该空心邻域内有界。

3.保号性定理：

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，，则存在 x_0 的空心邻域 $U^o(x_0)$，使得 $\forall x\in U^o(x_0)$ 恒有 $f(x)>0$。

第三节　极限计算

一、极限的四则运算法则

(一)定理 1：在某一变化过程中，如果变量 x 和变量 y 分别以 A 与 B 为极限，则变量 $x\pm y$ 以 $A\pm B$ 为极限，即有 $lim\left(x\pm y\right)=lim\,x\pm lim\,y=A\pm B$。

推论：两个无穷小量的代数和仍为无穷小量。

(二)定理 2：在某一变化过程中，如果变量 x 和变量 y 分别以 A 与 B 为极限，则变量 xy 以 AB 为极限，即有 $lim\left(xy\right)=lim\,x\,lim\,y=AB$。

推论 1：两个无穷小量的乘积仍为无穷小量。

推论 2：常数因子可以提到极限符号外面，即 $lim\,cy=c\,lim\,y$。

推论 3：如果 n 是正整数，则有

（1）$lim\,x^n=\left(lim\,x\right)^n$；（2）$lim\,x^{\frac{1}{n}}=\left(lim\,x\right)^{\frac{1}{n}}$

(三)定理 3：在某一变化过程中，如果变量 x 和变量 y 分别以 A 与 B 为极限，则变量 $\dfrac{x}{y}$ 以 $\dfrac{A}{B}$ 为极限，即有 $lim\dfrac{x}{y}=\dfrac{lim\,x}{lim\,y}=\dfrac{A}{B}$。

二、极限计算方法

（一）图形观察法

（二）直接利用四则运算法则

（三）复合函数的极限法则

定理:设 $y=f\left(u\right),u=\varphi\left(x\right)$，则 y 是 x 的复合函数 $y=f\left[\varphi\left(x\right)\right]$，

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi\left(x\right)=a,\lim\limits_{u\to a}f\left(u\right)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f\left[\varphi\left(x\right)\right]=\lim\limits_{u\to a}f\left(u\right)=A$。

(四) 未定式的极限计算方法

若所给的极限为 $\dfrac{0}{0}$、$\dfrac{\infty}{\infty}$、∞-∞ 等无法直接利用四则运算法则计算的类型时，一般可利用同除以最高次幂法、因式分解约分法、有理化法、变量代换法、通分法等一些具体方法，然后再利用四则运算法则计算。

（五）**MATLAB** 语句法求极限（课外自学）

思考题：

（1） 体会极限思想的应用；

（2） 如何理解变中有不变的数学思想；

（3） 有限为无限之和：在《庄子·天下篇》中有“截丈问题”的精彩论述：一尺之棰，日取其半，万世不竭.从数学角度分析这一论述的道理。

（4） 遗嘱的分配：一个老人有 3 个儿子，留有 19 头牛，遗嘱为：老大分配 1/2，老二分配 1/4，老三分配 1/5，且规定牛不能宰杀。在分牛时遇到麻烦，但邻居借给他们 1 头牛使用，共 20 头牛，按比例三个儿子依次分得 10 头、5 头、4 头。多出来的 1 头邻居再牵走。遗嘱分完。请说出其中蕴含的道理。

（5） 彩票概率大小：假定买某种彩票中奖的概率为 10%，如下两件事哪一件发生的可能性更大？ （1）只买一张就中奖。（2）连续买了 2n 张，且当 n 趋于无穷大时全都不中奖。

第四讲　极限与连续—连续和谐，居安思危

本讲知识点：

极限存在的两个准则，两个重要极限，无穷小量阶的比较，函数连续的概念，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质函数间断点的类型。

本讲基本要求：

1．了解极限存在的两个准则（夹逼定理、单调有界数列必有极限），掌握第一重要极限的证明，了解第二重要极限的证明方法，能熟练的应用两个重要极限计算函数的极限。

2．理解无穷大量与无穷小量的概念，掌握无穷大量与无穷小量的关系和性质。掌握无穷小量的阶的比较方法。

3．理解函数在某点连续，在（a、b）上连续，以及在[a、b]上连续的概念。了解函数间断的概念。理解连续函数的性质和初等函数的连续性。

4．掌握闭区间上连续函数的性质以及简单的证明。

5．掌握函数的间断点的计算。

本讲重点和难点

重点：两个重要极限及其应用，函数的连续性及其在闭区间上连续的性质

难点：极限存在的两个准则和两个重要极限，闭区间上连续函数的性质及应用

学时分配：3 学时

教学内容：

第一节　两个重要极限

一、极限存在的两个准则

（一）夹逼准则(squeeze rule)（极限的迫敛性）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且存在 x_0 的某空心邻域 $U^o(x_0,\delta)$，使得 $\forall x\in U^o(x_0,\delta)$，有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} h(x)=A$。

（二）单调有界数列必有极限准则

单调递增有上界数列有极限；单调递减有下界数列有极限。

步骤：1．判断数列的单调性；

2．证明数列是有界的；

3．求极限。

二、两个重要极限

（一）第一重要极限　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

注意：（1）0/0 型；（2）一般形式 $\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

（二）第二重要极限　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=e$

公式变形为：（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

注意：（1）1^{∞} 型；（2）解题应注意使用凑指数幂，使得底数的第二项与指数互为倒数，同时注意变化趋势；

（3）公式可推广为：$\lim\limits_{f(x)\to\infty}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)}=e$；

$\lim\limits_{f(x)\to\infty}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}$

三、连续复利

设银行的年利率为r，本金为A_0，则t 年后的本利和为$A_t=A_0(1+r)^t$；

若一年计n次利息，则到年终的本利和为$A＝A_0(1+\frac{r}{n})^n$

若计息时间无限缩短，每时每刻都计算利息，即令$n\to\infty$，那么到年终的本利和为 $A＝\lim\limits_{n\to\infty}A_0(1+\frac{r}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}A_0\left[(1+\frac{r}{n})^{\frac{n}{r}}\right]^r=A_0e^r$，$t$ 年后的本利和为

$$A_t＝\lim_{n\to\infty}A_0(1+\frac{r}{n})^{nt}=\lim_{n\to\infty}A_0\left[(1+\frac{r}{n})^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}=A_0e^{rt}$$

所以，若以连续复利计算利息，则复利公式是$A_t＝A_0e^{rt}$。

第二节　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

（一）无穷小量的定义

定义：若在自变量x的某个变化过程中有$\lim y=0$，则称变量y为x在该变化过程中的无穷小量。

注意：（1）谈到无穷小量时必须指明自变量的变化过程。

（2）无穷小量指的是变量，零是唯一可以作为无穷小量的常数。

（二）无穷小量与极限的关系

定理:变量y以A为极限的必要充分条件是:变量y可以表示为A与一个无穷小量的和.即$\lim y=A$的充要条件是$y=A+\alpha(x)$，$\alpha(x)$是在该自变量变化过程中的无穷小量。

（三）无穷小量的性质

1.有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量；

2.有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量；

3.无穷小量与无穷小量的乘积是无穷小量；

4.常量与无穷小量乘积是无穷小量；

（四）无穷小量阶的比较

设α,β是同一过程中的两个无穷小量.

1.若$lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 为比 β 高阶无穷小量，或称 β 为比 α 低阶无穷小量,记作：$\alpha=o(\beta)$

2.若 $lim\frac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$，则称 α 与 β 为同阶无穷小量。记作：$\alpha=O(\beta)$

3.若 $lim\frac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 为等价无穷小量。记作：$\alpha\sim\beta$

二、无穷大量

如果对于任意给定的正数 E,变量 y 在其变化过程中,总有那么一个时刻,在那个时刻以后,不等式 $|y|>E$ 恒成立,则称变量 y 是无穷大量,或称变量 y 趋近于无穷大.记作 $lim\, y=\infty$ 。

说明：（1）无穷大量不是很大的数，而是具有非正常极限的函数。

（2）若 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量，则 $f(x)$ 为 $U(x_0)$ 上的无界函数。反之，无界函数不一定是无穷大量。

三、无穷小量与无穷大量的关系

定理：在变量 y 的变化过程中，

(1)如果 y 是无穷大量,则 $\frac{1}{y}$ 是无穷小量；(2)如果 y(≠0)是无穷小量,则 $\frac{1}{y}$ 是无穷大量。

第三节　函数连续——极限应用

一、函数在某一点连续

（一）连续的两种定义形式

定义 1：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一领域内有定义，若有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续。

说明：（1）$y=f(x)$ 在 x_0 处有定义；（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；（3）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；

（4）$y=f(x)$ 在 x_0 处连续和当 $x\to x_0$ 时有极限是有区别的。

定义 2：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一领域内有定义，若有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续。

（二）左连续与右连续

若有 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，即在 x_0 左极限值等于函数值，就称 $f(x)$ 点 x_0 左连续；

若有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，即在 x_0 右极限值等于函数值，就称 $f(x)$ 点 x_0 右连续。

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是：函数 $f(x)$ 在点 x_0 既是右连续又是左连续。

（三）连续函数的和、差、积、商的连续性

设函数 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 连续，则它们的和、差、积、商（$g(x_0)\neq 0$）都在点 x_0 处连续。

（四）复合函数的连续性

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(u)$ 在点 u_0 连续，且 $u_0=f(x_0)$，则复合函数 $g(f(x))$ 在点 x_0 连续。即: $\lim\limits_{x\to x_0}g[f(x)]=g[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]=g[f(\lim\limits_{x\to x_0}x)]=g[f(x_0)]$

二、函数 $f(x)$ 在区间上连续

(一)定义

1.函数 $f\left(x\right)$ 在 (a,b) 上连续的定义

$f\left(x\right)$ 在 (a,b) 内每一点都连续,称 $f\left(x\right)$ 在 (a,b) 内连续, (a,b) 为函数 $f\left(x\right)$ 的连续区间。

2. 函数 $f\left(x\right)$ 在 $[a,b]$ 上连续的定义

若 $f\left(x\right)$ 在 (a,b) 内连续，且在 a 处右连续，在 b 处左连续，即

$\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right)=f\left(a\right), \lim\limits_{x\to b^-} f\left(x\right)=f\left(b\right)$，则称 $f\left(x\right)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

(二)初等函数的连续性定理

一切基本初等函数都是其定义域上的连续函数。任何初等函数在其定义区间(包含在定义域内的区间)内都连续。

三、函数间断点及其分类

（一）间断点定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果 x_0 不是函数 $f(x)$ 的连续点，则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点。

（二）间断点的类型

1.可去间断点

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而 $f(x)$ 在 x_0 没有定义，或者有定义但 $f(x_0)\neq A$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点。

2.跳跃间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 存在左右极限，但 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点。

可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点，其特点是函数在该点处的左、右极限都存在。

3.第二类间断点:函数在该点处至少有一侧的极限不存在，称为第二类间断点。

四、闭区间上连续函数的性质

（一）最值定理

1.最值定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在 $x_0\in I$ 使得 $\forall x\in I$，都有 $f(x)\le f(x_0)$（或 $f(x)\ge f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值（或最小值）。（最大最小值是在整个定义区间上的）

2.最值定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，则它在 $\left[a,b\right]$ 上必存在最大值和最小值。

注意：“闭区间”，“函数 $f(x)$ 连续”这两个条件缺一不可。

3.定理推论（有界性定理）

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，则它在 $\left[a,b\right]$ 上有界。

（二）介值定理

1.介值定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数 c，在开区间 $\left(a,b\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=c$。

注意："闭区间"，"函数 $f(x)$ 连续"这两个条件缺一不可。

2.零点定理或根值定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在开区间 $\left(a,b\right)$ 内至少存在一点ξ，使得 $f(\xi)=0$。

3.定理推论

闭区间上的连续函数必能取得它的最大值与最小值之间的一切值。

思考题：

（1） 如何用极限方法确定曲线渐近线？并举例说明。

（2） 试用函数连续的观点来分析如何构建和谐的社会体系。

（3） 假设有一个登山者头天上午 8 点从山脚开始上山，晚上 6 点到达山顶，第二天上午 8 点从山顶沿原路下山，下午 6 点到达山脚。问该登山者在上、下山过程中，会同时经过同一地点吗？为什么？

（4） 把椅子往不平的地面上一放，通常只有三只脚着地，放不稳，然而只需要挪动几次，就可以使四只脚同时着地，放稳了。把这个看似与数学无关的现象用数学语言给以表述，并用数学工具加以证实，椅子能在不平的地面上放平稳吗？

第五讲　导数与微分—变量变化速度与局部改变量

本讲知识点：

导数的概念，导数的几何意义和经济意义，可导与连续的关系，导数的四则运算，基本初等函数的导数，复合函数，反函数和隐函数的导数，高阶导数，微分的概念和运算法则，微分形式不变性

本讲基本要求：

1．理解导数的概念及可导性与连续性之间的关系，了解导数的几何意义

2．熟练掌握基本初等函数的导数公式,导数的四则运算法则.

3．掌握反函数求导公式。

4．熟练掌握复合函数求导的链式法则。

5．掌握隐函数求导法与取对数求导法。

6．掌握分段函数的导数计算。

7．理解高阶导数概念，掌握简单函数求 n 阶导数的方法。

8．了解微分的概念，可导与可微的关系及微分形式不变性，掌握利用导数求微分的方法。

9．了解微分的近似计算。

本章重点和难点

重点：导数和微分的概念，导数和微分的运算法则及其计算方法，导数和微分的应用

难点：导数与微分的概念，复合函数求导法，求高阶导数的方法。

学时分配：3

教学内容：

第一节　导数的概念——函数的局部变化率

一、导数概念引例

（一）变速直线运动的速度

设s表示一物体从某个时刻开始到时间t作直线运动所经过的路程，则s是t的函数$s=f(t)$。

当时间由t_0改变到$t_0+\Delta t$时，物体在Δt这一段时间内所经过的距离为

$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$，平均速度为$\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$。当$\Delta t$很小时，可用$\bar{v}$近似表示物体在时刻$t_0$的速度，$\Delta t$越小，近似程度就越好。当$\Delta t\to 0$时，若极限$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$存在，就称此极限为物体在时刻$t_0$的瞬时速度，即

$$v\big|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

（二）曲线切线的斜率问题

设有曲线 C 及 C 上一点 M，在点 M 外另取 C 上一点 N 做割线 MN。当 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，如果割线 MN 的极限位置为 MT，则称直线 MT 为曲线 C 在点 M 处的切线。

设割线 MN 与 X 轴的夹角为φ切线 MT 与 X 轴的夹角为α。曲线方程为 y=f (x),点 M 的坐标为 (x_0，y_0)，点 N 的坐标为$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$。于是，割线 MN 的斜率为$\tan\varphi=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

当点 N 沿曲线 C 趋向点 M 时，就有$\Delta x\to 0,\varphi\to\alpha$，割线的斜率$\tan\varphi$就会无限接近切线$\tan\alpha$的斜率,又由极限的定义，有

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=k$$

即为切线的斜率。

二、导数定义

（一）函数在一点的导数定义

设函数$f(x)$在点x_0的某个领域内有定义，当自变量在点x_0处取得改变量$\Delta x\neq 0$时，函数$f(x)$取得相应的改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

若$\Delta x\to 0$时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限值为函数$f(x)$在点$x_0$处的导数(或微商)，并称$y=f(x)$在点$x_0$处可导，记作：$f'(x_0)$或$y'\big|_{x=x_0}$或$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$或$\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$。

（二）导数的定义也可取如下两种形式

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

（三）利用导数定义求导数的步骤

1.求增量：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；2.作比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

3.求$\Delta x\to 0$时,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限,即$y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

（四）函数在区间(a,b)上可导

如果函数$y=f(x)$在在区间(a,b)内每一点x处均可导，则称函数$y=f(x)$
在区间(a,b)内可导。

（五）导函数定义

若函数$y=f(x)$在区间内的每一点都可导，则在该区间内每取一个自变量x的值，就可得到一个唯一对应的导数值，这就构成了一个新的函数，称为原函数$y=f(x)$的导函数，记做$y', f'(x), \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df(x)}{dx}$。导函数往往简称为导数。用极限表示为：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}。$$

三、导数的几何意义

函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$，就是曲线$f(x)$在点$M(x_0,y_0)$处的切线的斜率。

若α表示这个切线与x轴正向的夹角，则$f'(x)=\tan\alpha$。从而$f'(x)>0$意味着切线与x轴正向的夹角为锐角；$f'(x)<0$意味着切线与x轴正向的夹角为钝角；$f'(x)=0$表明切线与x轴平行。

若函数在点x_0处可导，则曲线$y=f(x)$在点$M(x_0,f(x_0))$处的切线方程为

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

四、函数在一点的左右导数

设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，若$\lim\limits_{\triangle x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$存在，则称之为$f(x)$在点$x_0$处的左导数，记作$f'_-(x_0)$；若$\lim\limits_{\triangle x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$存在，则称之为$f(x)$在点$x_0$处的右导数，记作$f'_+(x_0)$。

定理: 函数$y=f(x)$在点x_0处可导的充要条件是左右导数都存在且相等。

五、可导与连续的关系

定理 ：若函数在点$x=x_0$处可导，则函数在点$x=x_0$处连续。

注意：

1.定理的逆命题不成立；

2.定理的逆否命题一定成立，即若函数在点$x=x_0$处不连续，则函数在$x=x_0$处不可导；

3.可导函数的导数不一定连续。

第二节 导数的运算法则

一、函数和、差、积、商求导法则

设u,v都是x的可导函数，则有：

1.$(u\pm v)'=u'\pm v'$

2.$(uv)'=u'v+uv'$　　特别$(cv)'=cv'$　可推广到有限个

3.$(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$　　特别$(\dfrac{c}{v})'=-\dfrac{cv'}{v^2}$

二、复合函数求导法则

设$u=\varphi(x)$在点x可导，$y=f(u)$在相应的点u可导，则复合函数$y=f(\varphi(x))$在点x可导，且$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$或$y'_x=f'(u)\varphi'(x)$。

三、隐函数求导法则

只要把y看作x的函数，利用复合函数求导法，将方程$F(x,y)=0$的两边分别对x求导数，然后解出y'_x，即得隐函数的导数。

四、取对数求导法

当所给的两个函数是几个式子的连乘与连除形式时，对等号两端同时取自然对数，然后利用隐

函数求导法则即可求得。

五、分段函数求导

对于分段函数，其各区间段内导数的求法与一般所讲的导数的求法无异，要特别注意的是分界点 $x=x_0$ 处的导数一定要用(左、右)导数的定义求，即

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad 或 \quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

六、基本初等函数的求导公式小结

（一）常量函数求导：$(\mathrm{C})'=0$

（二）幂函数求导：$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha\in R)$

（三）指数函数求导：$(a^x)'=a^x\ln a \quad (a>0,a\neq 1)$,特别$(e^x)'=e^x$

（四）对数函数求导：$(\log_a^x)'=\dfrac{1}{x\ln a} \quad (a>0,a\neq 1)$,特别$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

（五）三角函数求导：

$(\sin x)'=\cos x$； $(\tan x)'=\sec^2 x$； $(\sec x)'=\sec x\tan x$；

$(\cos x)'=-\sin x$；$(\cot x)'=-\csc^2 x$；$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

（六）反三角函数求导：

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$；$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$；

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$； $(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

七、高阶导数的定义

一般地，若函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导，则称 $f'(x)$ 在点 x 处的导数为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的二阶导数。记作：$f''(x)$，y''，或$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

类似地，二阶导数 $y''=f''(x)$ 的导数就称作函数 $y=f(x)$ 的三阶导数，记作：

$f'''(x)$，y'''，或$\dfrac{d^3y}{dx^3}$

一般地，定义 $y=f(x)$ 的 n 阶导数为 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数，即

$f^{(n)}(x),y^{(n)}$，或$\dfrac{d^ny}{dx^n}$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数。函数 $y=f(x)$ 的各阶导数在点 $x=x_0$ 处的数值记为：$f'(x_0)$，$f''(x_0)$，…，$f^{(n)}(x_0)$，或 $y'\big|_{x=x_0}$，$y''\big|_{x=x_0}$，…，$y^{(n)}\big|_{x=x_0}$。

一般地，求高阶导数就是多次接连地求导数。当求 n 阶导数时，一般情况下都有规律可循，可相应地依次求低阶导数，发现规律，得出 n 阶导数。

八、应用 MATLAB 语句求导数（课外自学）

（一）转为求变化率的极限

（二）直接求函数的导数

第三节　函数微分

一、微分的定义

（一）问题引例：热胀冷缩原理的数学分析

（二）微分定义

设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在此区间内，若函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$。其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\,\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 dy，即 $dy=A\Delta x$。

（三）可微与可导的关系

若函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，则它在点 x 处一定可导，且

$dy=A\Delta x=f'(x)\Delta x$；反之，若 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，则它在点 x 处也可微。

自变量的微分就是它的改变量 Δx，即 $dx=\Delta x$。则 $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$，故导数又称为微商。

（四）微分的几何意义

曲线在一点的切线上的纵坐标的改变量。当 Δx 很小时，可以用切线段来近似代替曲线段。

二、微分运算法则

（一）基本初等函数的微分公式

1．常量函数微分：$dC=0$　(C 为常数　)

2.幂函数微分：$d(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}dx\quad(\alpha\in R)$

3.指数函数微分：$d(a^x)=a^x\ln a dx\quad(a>0,a\neq 1)$　特别 $d(e^x)=e^x dx$

4.对数函数微分：$(\log_a^x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\quad(a>0,a\neq 1)$　特别 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

5.三角函数微分：

$d(\sin x)=\cos x dx$；$d(\tan x)=\sec^2 x dx$；$d(\sec x)=\sec x\tan x dx$；

$d(\cos x)=-\sin x dx$；$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$；$d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$

6.反三角函数微分：

$d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$；$d(\arccos x)=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$；

$d(\arctan x)=\dfrac{dx}{1+x^2}$　；　$d(arc\cot x)=-\dfrac{dx}{1+x^2}$

（二）函数和、差、积、商微分运算法则

设 u,v 都是 x 的可微函数，则有：

1. $d(u\pm v)=du\pm dv$

2. $d(uv)=vdu+udv$，特别 $d(cv)=cdv$　可推广到有限个

3. $d(\dfrac{u}{v})=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$，特别 $d(\dfrac{c}{v})=-\dfrac{cdv}{v^2}$

（三）复合函数微分法则

1.复合函数微分法则

设$u=\varphi(x)$在点x可导，$y=f(u)$在相应的点u可导，则复合函数$y=f(\varphi(x))$在点x的微分为$dy = y'_x dx = f'(u)\varphi'(x)dx$。

2.微分形式不变性

在复合函数的微分法则中，由于$du=\varphi'(x)dx$，所以复合函数$y=f(\phi(x))$的微分公式也可写成$dy = f'(u)du$，或$dy = y'_u du$。

由此可见，无论u是自变量还是中间变量，微分形式$dy = f'(u)du$保持不变。这一性质称为微分形式不变性。

三、微分的近似计算

由微分定义$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$，当$|\Delta x|$很小时，$\Delta y \approx f'(x_o)\Delta x = dy$，

$|\Delta x|$越小，近似程度越好。上式还可表示为$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0 + f'(x_0)\Delta x$。

令$x_0+\Delta x = x$，则有$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$。

特别地当$x_0=0$时，有$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$。

当x很小时， 可以推得下列各式：

1. $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\dfrac{x}{n}$；2. $e^x \approx 1+x$；　3. $\ln(1+x) \approx x$　；　4. $\sin x \approx x$（x为弧度）；

5. $\tan x \approx x$（x为弧度）

思考题：

（1）　体会导数概念的实质？

（2）　构造函数，用各种法则求导。

（3）　如何利用高阶导数分析函数的性质？

（4）　微分方法体现的思想是什么？

（5）　如何用微分思想分析问题、解决问题？举例说明。

第六讲　导数应用（1）—局部与整体的连接

本讲知识点：

微分中值定理　罗彼塔(L'Hospital)法则

本讲基本要求：

1．理解罗尔(Rolle)定理和拉格朗日(Lagrange)中值定理，了解柯西(Cauchy)中值定理，掌握这三个定理的简单应用；

2．会用罗必达(L'Hospital)法则求极限；

本讲重点和难点

重点: 微分中值定理，罗必达(L'Hospital)法则

难点: 微分中值定理，罗必达(L'Hospital)法则

学时分配：3 学分

教学内容：

第一节　微分中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

（一）罗尔(Rolle)定理

若函数 $f(x)$ 满足如下条件：1. 区间 $[a,b]$ 上连续；2. $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导；3. $f(a)=f(b)$ 。则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$ 。

注意：定理中三个条件缺一不可。但也不能认为定理条件不全具备，就一定不存在属于 (a,b) 的 ξ，使得 $f'(\xi)=0$ 。

（二）几何意义

在每点都有切线的一段曲线上，若两端点的高度相同，则在此曲线上至少存在一条水平切线。

二、拉格朗日(Lagrange)中值定理

（一）拉格朗日(Lagrange)中值定理

若函数 $f(x)$ 满足如下条件：1.区间 $[a,b]$ 上连续；2. $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导；

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)=f(a)}{b-a}$ 。

（二）几何意义

如果曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 是连续的，除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线，则在曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上至少有一点 C，在该点处曲线的切线平行于弦 AB。

（三）几种变形

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), a<\xi<b$

$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a), 0<\theta<1$

$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h, 0<\theta<1, b=a+h$

（四）推论

推论 1．若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 为 I 上的一个常量函数。

推论 2: 若函数 $f(x)$)和 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，并且 $f'(x)\equiv g'(x)$，则在 (a,b) 内

$f(x)=g(x)+C$（C 为常数）

（三）柯西(Cauchy)中值定理（课外自学）

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足如下条件：（1） $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；（2） $f(x)$ 和 $g(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导；（3） $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 在 (a,b) 内不同时为零；（4） $g(a)\neq g(b)$。则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

第二节　洛必达法则

一、$\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限的洛必达法则

定理：若函数 $f(x)$)和 $g(x)$ 在点 x_0 的某一邻域（点 x_0 可以除外）内有定义，且满足条件：

1．$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

2．$f(x)$)和 $g(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

3．$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(A\in R,或\pm\infty,\infty)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限的洛必达法则

定理: 若函数 $f(x)$)和 $g(x)$ 在点 x_0 的某一邻域（点 x_0 可以除外）内有定义，且满足条件：

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$

（2） $f(x)$)和 $g(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(A\in R,或\pm\infty,\infty)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$

注：（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型可继续对此极限式应用洛必达法则，由此类推可多次连续使用此法则。

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\ldots\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=\ldots\ldots$$

（2）求导过程中要注意化简，也可使用其它求极限的方法，如等价无穷小代换等。

(3)当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时（不是 ∞），洛必达法则失效，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 仍可能存在。

三、其他未定式的极限

洛必达法则解决 $\dfrac{0}{0}$、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限问题，针对 $0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、1^∞、0^0、∞^0 等型的未定

式的极限问题，可经过适当的转换，将它们化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，然后利用洛必达法则求极限。

1. $0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty$或$0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}$

2. $\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$

3. $\left.\begin{matrix} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \begin{cases} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \Rightarrow 0\cdot\infty \\ 0\cdot\ln\infty \end{cases}$

思考题：

（1）　如何理解中值定理的含义、作用；

（2）　用洛必达法则求未定式极限。

第七讲　导数应用（2）—函数性态分析，边际分析、弹性分析

本讲知识点：

函数的单调性，函数的极值，函数图形的凹向性，拐点，渐近线，函数图形的描绘，函数的最大值与最小值，边际函数，弹性函数

本讲基本要求：

1．掌握函数单调性的判别方法及简单应用，掌握函数极值、最大值和最小值的求法）；

2．会用导数判断函数图形的凹向，会求函数图形的拐点和渐近线；

3．握函数作图的基本步骤和方法,会做简单函数的图形；

4．了解导数的经济意义（边际和弹性的概念）。

本讲重点和难点：

重点:函数图形的描绘，函数的最大值与最小值

难点: 函数图形的描绘，

学时分配：3 学时

教学内容：

第一节　函数性态分析

一、函数单调性与极值问题

（一）函数单调性判断

定理：设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，那么

如果 $x\in(a,b)$ 时恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加；

如果 $x\in(a,b)$ 时恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少；

注意：如果在区间 (a,b) 内 $f'(x)\ge 0$（或 $f'(x)\le 0$），但等号只在个别点处成立，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内仍是单调增加（或单调减少）的。

（二）函数极值

1．函数极值定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果对该邻域内一切异于 x_0 的 x，恒有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的极大值点；如果对该邻域内一切异于 x_0 的 x，恒有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的极小值点。极值是曲线增减的局部转折点。

2．函数极值存在的必要条件

定理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数，且 x_0 是极值点，则必有 $f'(x_0)=0$。

说明：此命题的逆命题不一定成立,极值点还有可能是导数不存在的点。所以，函数的极值点必是函数的驻点或导数不存在的点，反之不成立。

3．判定极值的充分条件

定理（第一充分条件）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域（$x_0-\delta,x_0+\delta$）内连续且可导（在点 x_0 处导数可以不存在）

（1）如果当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x_0)>0$，而当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x_0)<0$，则函数 $f(x)$

在点x_0处取极大值$f(x_0)$；

(2)如果当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x_0)<0$，而当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x_0)>0$，则函数$f(x)$在点x_0处取极小值$f(x_0)$；

（3）如果当$x\in U^o{}_\delta(x_0)$时，$f'(x_0)$不变号，则$f(x)$在x_0处无极值。

定理（第二充分条件）

设函数$f(x)$在点x_0处具有二阶导数，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么

（1）若$f''(x_0)>0$，则x_0是函数的极小值点；（2）若$f''(x_0)<0$，则x_0是函数的极大值点。

（三）函数最值

由连续函数在闭区间上的性质可知，若函数在闭区间上连续，则该函数在此区间上一定存在最大值和最小值。这给出了函数在闭区间上存在最大（小）值的充分条件。闭区间上求最值的方法：

1．求出函数在闭区间上所有驻点和不可导点，设其为有限个，得到可能极值点$x_1,x_2,\cdots,x_n$；

2．计算出函数值$f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$以及$f(a)$，$f(b)$；

3．比较 2 中所有函数值的大小，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值。

注意：（1）闭区间上单调函数最值为其端点处函数值；

（2）如果函数在开区间上有且仅有一个极大值，而没有极小值，则此极大值为函数的最大值，极小值亦然；

二、曲线的凹向与拐点

（一）曲线凹向的定义

若曲线$f(x)$在区间(a,b)内曲线段总位于其上任一点处切线的上方，则称曲线在(a,b)内是凹的（上凹$\bigcup$）；若曲线总位于其上任一点处切线的下方，则称曲线在(a,b)内是凸的（下凹$\bigcap$）

（二）曲线凹向的判定定理

定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有一阶和二阶导数，则有

（1）若在(a,b)内$f''(x)>0$，则$f(x)$在(a,b)上的图形是凹的（$\bigcup$）

（2）若在(a,b)内$f''(x)<0$，则$f(x)$在(a,b)上的图形是凸的（$\bigcap$）

（三）拐点及其求法

1.拐点定义：凹弧与凸弧的分界点（x_0，$f(x_0)$称为拐点。

注意：拐点是$f''(x)=0$的点或$f''(x)$不存在的点，反之不成立。

2.求曲线凹向与拐点的步骤

（1）求定义域

（2）求$f''(x)$（写成乘积形式）。

（3）求$f''(x)=0$的点和$f''(x)$不存在的点。

（4）用上述点将定义域分成若干小区间，考查每个小区间上$f''(x)$的符号，并判断凹凸性。

（5）若$f''(x)$在点x_0两侧异号，则（x_0，$f(x_0)$是拐点，否则不是。

第二节　函数图形的作法

一、曲线渐近线

定义：若曲线C上的动点P沿着曲线无限地远离原点时，点P与某一固定直线L的距离趋于零，则称直线L为曲线C的渐近线。

（一）**水平渐近线**：若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$成立，则称直线$y=b$为曲线$y=f(x)$的水平渐近线。

（二）**垂直渐近线**：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$成立，则称直线$x=x_0$为曲线$y=f(x)$垂直渐近线

（三）**斜渐近线**：若$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$成立，则称$y=ax+b$为曲线$y=f(x)$斜渐近线。其中：$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x};b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$

二、曲线做图的一般作法

步骤：

1．求函数的定义域,值域,考察奇偶性，周期性

2．确定函数的单调区间，极值点,凹凸区间及拐点

3．考察曲线的渐近线

4．画出坐标轴，标出特殊点（极值点、拐点、及与坐标轴的交点等）的位置，画出渐近线

5．据讨论结果逐段描绘函数图象。

第三节　导数在经济学中的应用

一、边际函数（边际分析）——函数的绝对变化

（一）边际函数的概念

1.边际函数定义

称$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$为$f(x)$在$(x_0,x_0+\Delta x)$内的平均变化率（平均变化速度）。

称$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$为$f(x)$在点$x=x_0$处的边际函数值（变化速度）。

设函数$y=f(x)$可导，导函数$f'(x)$也称为边际函数。

2.边际的含义

$f(x)$在$x=x_0$处，当x产生一个单位的改变时，y近似改变$f'(x_0)$个单位。

$\Delta y|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}\approx dy|_{\substack{x=x_0\\ dx=1}}=f'(x_0)dx|_{\substack{x=x_0\\ dx=1}}=f'(x_0)$

（二）经济学中常见的边际函数

1.边际成本函数：

总成本的变化率$C'(Q)$，称为边际成本。表示当已生产了Q个单位产品时，再增加一个单位产品时总成本增加的数量。

2.边际收益函数：

总收益的变化率$R'(Q)$，称为边际收益。表示销售Q个单位产品后，再销售一个单位的产品所增加的收益。

3.边际利润函数：

利润函数为$L(Q)=R(Q)-C(Q)$；

利润函数的变化率$L'(Q)$，称为边际利润$L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)$。表示若已经生产了Q个单位的产品，再多生产一个单位的产品总利润的增加量。

（三）利润极大化原则

$L(Q)$ 取得最大值的必要条件：$L'(Q)=0$；$L(Q)$ 取得最大值的充分条件：$L''(Q)<0$。

二、函数的弹性（弹性分析）——函数的相对变化率

（一）弹性函数的概念

设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，函数的相对改变量 $\frac{\Delta y}{y_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)}$，与自变量的相对改变量 $\frac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$，称为函数 $f(x)$ 从 $x=x_0$ 到 $x=x_0+\Delta x$ 两点间的相对变化率，或称两点间的弹性。当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 的极限称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的相对变化率，也就是相对导数，或称弹性。即 $\frac{Ey}{Ex}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y})=f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}$。

$\frac{E}{Ex}f(x_0)$ 表示在点 x_0 处的弹性，说明当 x 在点 x_0 处改变 1%时，$f(x)$ 近似地改变 $\frac{E}{Ex}f(x_0)\%$。

（二）需求弹性与供给弹性

1.需求价格弹性

某商品需求函数 $Q=f(P)$ 在 $P=P_0$ 处可导，$-\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P_0}{Q_0}$ 成为该商品在 $P=P_0$ 与 $P=P_0+\Delta P$ 两点间的需求弹性。记作：$\overline{\eta}(P_0,P_0+\Delta P)=-\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P_0}{Q_0}$。

称 $\lim\limits_{\Delta P\to 0}(-\frac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0})=-f'(P_0)\frac{P_0}{f(P_0)}$ 为该商品在 $P=P_0$ 处的需求弹性。记作：

$\eta|_{P=P_0}=\eta(P_0)=-f'(P_0)\frac{P_0}{f(P_0)}$

2.供给价格弹性

设某商品的供给函数 $Q=\varphi(P)$ 在点 P_0 处可导，称 $\overline{\varepsilon}(P_0,P_0+\Delta P)=\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P_0}{Q_0}$ 为该商品在 P_0 和 $P_0+\Delta P$ 两点间的供给弹性；称 $\varepsilon|_{P=P_0}=\varepsilon(P_0)=\varphi'(P_0)\frac{P_0}{\varphi(P_0)}$ 为在 P_0 处的供给弹性。

思考题：

（1） 如何利用导数方法分析函数的性质？

（2） 如何利用导数方法对经济活动中的最值问题，边际和弹性等问题进行分析？

（3） 构建函数画图（包含函数的各种性质）。

第八讲　不定积分—微分的逆运算问题，逆向思维的培养

本讲知识点：

原函数和不定积分的概念，不定积分的基本性质，基本积分公式，不定积分的换元法和分部积分法

本讲基本要求：

1．理解原函数与不定积分的概念，掌握不定积分的基本性质；

2．掌握基本积分公式；

3．掌握不定积分的换元积分法和分部积分法；

本讲重点和难点：

重点: 不定积分的概念，基本性质和基本积分公式，不定积分的换元法和分部积分法

难点: 不定积分的换元法和分部积分法

学时分配：3 学时

教学内容：

第一节　不定积分的概念

一、原函数的概念

（一）原函数定义：设 $f(x)$ 是定义在某区间上的已知函数，如果存在一个函数 $F(x)$，对于该区间上每一点满足：$F'(x)=f(x)$ 或者 $dF(x)=f(x)dx$.就称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数。

（二）研究原函数必须解决以下两个重要问题：

1.在什么条件下，一个函数的原函数存在？如果存在是否只有一个？

2.若已知某函数的原函数存在，又怎样把它求出来？

（三）原函数存在定理：

1.若函数 $f(x)$ 在区间上连续，则 $f(x)$ 在该区间上存在原函数 $F(x)$。

2.设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在某区间上的一个原函数，则

（1） $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数，其中 C 是任意常数；

（2） $f(x)$ 的任意两个原函数之间只可能相差一个常数。

二、不定积分的定义

设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间上的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有的原函数称为 $f(x)$ 的不定积分。记作：$\int f(x)dx$ 。即 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 。其中 $\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)dx$ 为被积表达式，x 为积分变量。

三、不定积分的几何意义

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则称 $y=F(x)$ 的图像为 $f(x)$ 的一条积分曲线。于是，函数 $f(x)$ 的不定积分在几何上表示 $f(x)$ 的某一条积分曲线沿纵轴方向任意平移所得一切积分曲线组成的曲线族。

显然，若在每一条积分曲线上横坐标相同的点处作切线，则这些切线是平行的。任意两条积分曲线的纵坐标之间相差一个常数。

四、不定积分的性质

（一）不定积分与微分（或导数）互逆

1．$[\int f(x)dx]'=f(x)$ 或者 $d\int f(x)dx=f(x)dx$

2.$\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或者 $\int dF(x)=F(x)+C$

（二）和差函数的不定积分等于不定积分的和差。即

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

（三）常数可以提到积分符号外面。即

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx(k\neq 0，为常数)$$

五、基本积分公式

由基本初等函数求导公式可以相应地得到如下基本积分公式：

（一）$\int dx=x+c$

（二）$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+!}+c(\alpha\neq -1)$

（三）$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$

（四）$\int a^{x}dx=\frac{1}{\ln a}a^{x}+c(a>0,a\neq 1)$

（五）$\int e^{x}dx=e^{x}+c$

（六）$\int\sin xdx=-\cos x+c$

（七）$\int\cos xdx=\sin x+c$

（八）$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\sec^{2}dx=\tan x+c$

（九）$\int\frac{1}{\sin^{2}x}dx=\int\csc^{2}xdx=-\cot x+c$

（十）$\int\sec x\tan xdx=\sec x+c$

（十一）$\int\csc x\cot xdx=-\csc x+c$

（十二）$\int\frac{1}{1+x^{2}}dx=\arctan x+c$

（十三）$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\arcsin x+c$

说明：基本积分公式是以 x 为积分变量的，将基本公式中所有 x 换成其它字母亦成立。

第二节　换元法——不定积分的计算方法（1）

一、第一类换元法（凑微分法）

（一）定理：设 $f(u)$ 的原函数为 $F(u)$，$u=\phi(x)$ 可导，则 $F(\phi(x))$ 是 $f[\phi(x)]\phi'(x)$ 的

原函数，即$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \underline{\underline{u=\varphi(x)}} \int f(u)du = F(u)+c = F[\varphi(x)]+c$

这种将$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$利用中间变量$u$化为$\int f(u)du$。则可直接（或稍微变形就可）应用基本积分公式求得结果，再将u还原成$\varphi(x)$的积分法，称为第一类换元积分法，也叫凑微分法。

说明：使用第一换元积分法的关键是设法把被积表达式$f(x)dx$凑成$f[\phi(x)]\phi'(x)dx$的形式，以便选取变换$u=\phi(x)$，化为易于积分的$\int f(u)du$，最终不要忘记把新引入的变元u还原成起初的变元x。

（二）第一换元积分法的基本步骤

1.先把被积函数$f(x)$"凑"成$g[\phi(x)]\phi'(x)$的形式；

2.令$u=\phi(x)$，则$du=\phi'(x)dx$，于是有

$$\int f(x)dx = \int g[\phi(x)]\phi'(x)dx = \int g(u)du = F[\phi(x)]+C$$

3.利用积分表达式求出$\int g(u)du = F(u)+C$

4.将$u=\phi(x)$带回原变量x，即$\int f(x)dx = \int g(u)du = F[\phi(x)]+C$

二、第二换元积分法

（一）**定理**：设函数$x=\phi(t)$连续，$\phi'(t)$存在且连续，其反函数$t=\phi^{-1}(x)$存在且可导，若$\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt = F(t)+C$，则

$$\int f(x)dx = \int f[\phi(t)]\phi'(t)dt = F(t)+C = F[\phi^{-1}(x)]+C。$$

（二）三角换元法

利用三角函数换元，变根式积分为三角有理式积分

被积函数$f(x)$含根式	所作代换
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$

第三节　分部积分法——不定积分的计算方法（2）

一、分部积分法

定理：若$u(x)$与$v(x)$可导，且不定积分$\int u'(x)v(x)dx$存在，则$\int u(x)v'(x)dx$也存在，并有

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

或：　$\int udv = uv - \int vdu$

此定理的关键问题在于如何把被积函数分成两部分，如何选取u与dv。

选取原则：1.积分容易者dv，或是由$v'(x)$容易求$v(x)$；

2.求导简单者选为u。在两者不可兼得的情况下，首先保证前者。

3.不定积分$\int vdu$要比原不定积分$\int udv$容易求。

二、用 MATLAB 求不定积分（课外自学）

（一）int(‘F’,‘s’)：符号表达式 F 对自变量 s 求不定积分；
（二）int(‘F’)：符号表达式 F 对默认自变量 x 求不定积分；

思考题：
（1） 如何利用微分与积分的互逆性得到函数的不定积分？
（2） 三种求不定积分的方法（凑法、换法、分部法）体现了什么数学思想？

第九讲　定积分—求总量问题

本讲知识点：

定积分的概念和基本性质，定积分中值定理，变上限积分函数及其导数，牛顿-莱布尼兹公式，定积分的换元法与分部积分法，定积分的应用，反常积分

本讲基本要求：

1.了解定积分的概念和几何意义；知道定积分的基本性质和积分中值定理。

2.理解变上限定积分定义的函数并会求它的导数；

3.熟练运用牛顿一莱布尼兹公式计算定积分。

4.熟练掌握定积分的换元法和分部积分法。

5.会利用定积分求平面图形的面积和旋转体的体积；会利用定积分求解简单的经济应用问题。

6.了解反常积分的概念，会计算反常积分。

本讲重点和难点：

重点：定积分的计算，平面图形的面积和旋转体的体积的计算。

难点：变上限积分函数，定积分与不定积分的关系。

学时分配：3 课时

教学内容：

第一节　定积分的概念

一、定积分的概念引入

（一）曲边梯形的概念

在直角坐标系中，由连续曲线$y=f(x)$与直线$x=a, x=b, y=0$所围成的图形称为曲边梯形。其中，在x轴上的线段称为曲边梯形的底边，曲线段称为曲边梯形的曲边。任意曲线围成的平面图形的面积，在适当选择坐标系后，往往可以化为两个曲边梯形面积的差。

（二）曲边梯形的面积计算方法

1.分割：任取分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$把曲边梯形的底$[a,b]$分成$n$个小区间：$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，…，$[x_{i-1},x_i]$，…，$[x_{n-1},x_n]$。小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度记为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$。过各分点作垂直于$x$轴的直线，把整个曲边梯形分成$n$个小曲边梯形，其中第$i$个小曲边梯形的面积为$\Delta A_i\,(i=1,2,\cdots,n)$。

2.求和：在第i个小曲边梯形的底$\left[x_{i-1},x_i\right]$上任取一点$\xi_i\ \left(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i\right)$它所对应的函数值时$f(\xi_i)$，用相应的宽为$\Delta x_i$，长为$f(\xi_i)$的小矩形面积来近似代替这个小曲边梯形的面积，即：$\Delta A_i = f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\ \left(i=1,2,\cdots n\right)$，把$n$个小矩形面积相加得和式它就是曲边梯形面积$A$的近似值，即$A\approx\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$。

3.求极限：分割越细，$f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$就越接近于曲边梯形的面积$A$，当最大的小区间长度趋近于零，即$\lambda\to 0(\lambda=\max_i\left\{\Delta x_i\right\})$时，和式$A\approx\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$的极限就是$A$，故

$A \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ 。

可见，曲边梯形的面积是一个和式的极限。将这种解决问题的方法一般化，即得到定积分的定义。

说明：

（1） 微元法——用矩形面积近似取代曲边梯形面积

（2） 以直代取的一般描述

二、定积分的定义

（一）定义

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]\ (i = 1,2,\cdots,n)$，其长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，在每个小区间上任取一点 $\xi_i\left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right)$，则乘积 $f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\ \left(i = 1,2,\cdots n\right)$ 称为积分元素。总和 $S = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ 称为积分和。如果当 n 无限增大，而 Δx_i 中最大者 $\Delta x \to 0\left(\Delta x = \max_i\{\Delta x_i\}\right)$ 时，总和 S 的极限存在，且此极限与 $[a,b]$ 的分法以及 ξ_i 的取法无关。则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是可积的，并将此极限值称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f\left(x\right)dx$。即 $\int_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\Delta x \to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$。其中 $f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，$[a,b]$ 称为积分区间，a 称为积分下限，b 称为积分上限。

注意：

定积分表示一个数，它只取决于被积函数与积分上，下限，而与积分变量用什么字母无关。例如：$\int_a^b f\left(x\right)dx = \int_a^b f\left(t\right)dt$

（二）规定

1.在定积分中，如果 $a > b$，规定 $\int_b^a f\left(x\right)dx = -\int_a^b f\left(x\right)dx$

2.在定积分中，如果 $a = b$，规定 $\int_a^a f\left(x\right)dx = 0$

（三）定积分的几何意义

1.当 $f\left(x\right) \ge 0$ 时，$\int_a^a f\left(x\right)dx = A$；

2.当 $f\left(x\right) < 0$ 时，$\int_a^a f\left(x\right)dx = -A$

三、定积分的性质

设函数 $f\left(x\right), g\left(x\right)$ 均为 $[a,b]$ 上的可积函数，则有下列性质：

（一）常数因子可以提到积分号前,即 $\int_a^a kf\left(x\right)dx = k\int_a^b f\left(x\right)dx$ （k 是常数)

（二）代数和的积分等于积分的代数和,即 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$。

（三）定积分的可加性

如果积分区间 $[a,b]$ 被点 c 分成两个小区间 $[a,c]$，$[c,b]$ 则

$$\int_a^a f\left(x\right)dx = \int_a^c f\left(x\right)dx + \int_c^b f\left(x\right)dx$$

（四）如果被积函数 $f(x)=1$,则有 $\int_a^b dx = b-a$

（五）比较性质：如果函数 $f(x), g(x)$ 在区间 (a,b) 上满足 $f(x) \le g(x)$,则有

$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

（六）估值性质：如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上的最大值与最小值分别为 M, m,则

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

（七）积分中值定理:

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在区间 $[a,b]$ 上，至少存在一点 ξ，使得

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad a \le \xi \le b$

由定积分的几何意义理解定积分中值定理更直观，以连续曲线 $f(x)$（$a \le x \le b, f(x) \ge 0$）为曲边的曲边梯形面积，一定等于以 $f(\xi)$ 为高，$b-a$ 为底的一个特殊矩形的面积。

第二节　牛顿莱布尼兹公式——定积分的计算

一、变上限积分函数的定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x \in [a,b]$，则 $\int_a^x f(x)dx$ 存在。在 $\int_a^x f(x)dx$ 式子中的 x 既是积分变量，又是积分上限，为避免混淆，把积分变量改为 t,则积分写为 $\int_a^x f(x)dx$。

由于积分下限为定数 a，上限 x 在区间 $[a,b]$ 上变化，故 $\int_a^x f(x)dx$ 的值随 x 的变化而变化，也就是说 $\int_a^x f(x)dx$ 是变量 x 的函数，称 $\int_a^x f(x)dx$ 为变上限积分函数。记作

$F(x) = \int_a^x f(x)dx, x \in [a,b]$

二、原函数存在定理

（一）变上限积分函数的可导性

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ 在 $[a,b]$ 上可导，且其导数就是 $f(x)$，即 $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$。

本定理把导数和定积分这两个表面上看似不相干的概念联系了起来，它表明：在某区间上连续的函数 $f(x)$，其变上限积分 $\int_a^x f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。

（二）原函数存在定理

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在该区间上 $f(x)$ 的原函数必存在。

（三）牛顿—莱布尼兹公式

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上边续，且 $F(x)$ 是它在该区间上的一个原函数，则有

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

此公式称为牛顿—莱布尼兹公式。

公式表明：

1．定积分的计算不必用和式的极限，而是利用不定积分来计算。

2．只要我们求出 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，在区间两端点处的函数值差 $F(b)-F(a)$，就是 $\int_a^x f(x)dx$ 的值。

三、定积分的计算

（一）换元法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，变换 $x=\varphi(t)$ 满足：

1. $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$　　2.在区间 $[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$) 上，$\varphi(t)$ 单调且有连续的导数。

则有 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

（二）两类特殊的定积分

1.对称区间上的定积分

设 $f(x)$在关于原点对称的区间$[-a,a]$,上可积，则

（1）当 $f(x)$为奇函数时，$\int_{-a}^a f(x)dx=0;$

（2） 当 $f(x)$为偶函数时，$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

2.周期函数的定积分

设 $f(x)$是以T 为周期的周期函数，且可积，则对任意实数a，有 $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

（三）定积分的分部积分公式

设$u(x)$和$v(x)$在区间$[a,b]$上有连续的导数，则

$\int_a^b udv=[uv]_a^b-\int_a^b vdu$, 或$\int_a^b uv'dx=[uv]_a^b-\int_a^b vu'dx$

上述公式称为定积分的分部积分公式。

（四）用 **MATLAB** 求定积分（补充自学）

1.int(‘F’,‘s’, a,b))：符号表达式 F 对自变量 s 从 a 到 b 的定积分；

2.int(‘F’,a,b)：符号表达式 F 对默认自变量 x 从 a 到 b 的定积分；

第三节　广义积分——极限方法的应用（课外自学）

一、无限区间上的广义积分

（一）$[a,+\infty]$上的广义积分

设函数 $f(x)$在区间$[a,+\infty]$内连续，对于任意给定的$t>a$，积分 $\int_a^t f(x)dx$ 都存在，它是t的函数，如果极限$\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$存在，则称此极限值为函数 $f(x)$在无限区间$[a,+\infty]$上的广义积分，记为$\int_a^{+\infty} f(x)dx$。即$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$

说明：

若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$存在，也称$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$不存在，也称$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散

（二）$(-\infty,b]$上的广义积分

如果$f(x)$在（$-\infty$，$b]$上连续，则$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{t\to\infty}\int_{t}^{b} f(x)dx$。若$\lim\limits_{t\to\infty}\int_{t}^{b} f(x)dx$存在，则称$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$收敛；若$\lim\limits_{t\to\infty}\int_{t}^{b} f(x)dx$不存在，则称$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$发散。

（三）$(-\infty,+\infty)$上的广义积分

如果$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，则$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$，

当$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$与$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$均收敛时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛；

当$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$与$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$有一个发散时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$发散。

（四）无穷区间上的牛顿-莱布尼兹公式

设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$\int_{a}^{x} f(t)dt=F(x)-F(a)$。记作：

$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$，　$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$，于是有：

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_{a}^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=F(b)-F(-\infty)=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=F(+\infty)-F(-\infty)=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

注意：$F(+\infty)$和$F(-\infty)$是极限，广义积分是否收敛，取决于这些极限是否存在。

二、无界函数的积分

（一）函数$f(x)$在$x=b$处无界

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,当$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，如果极限$\lim\limits_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$存在，则称该极限为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的反常积分（或瑕积分），$x=b$是函数$f(x)$的瑕点。记作$\int_{a}^{b} f(x)dx$，即$\int_{a}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$。

说明：

若$\lim\limits_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$存在，称$\int_{a}^{b} f(x)dx$收敛；若$\lim\limits_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$不存在，称$\int_{a}^{b} f(x)dx$发散。

（二）函数$f(x)$在$x=a$处无界

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，而$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，则$\int_{a}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)dx$；

说明：

若$\lim\limits_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)dx$存在，则$\int_{a}^{x} f(x)dx$收敛；$\lim\limits_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)dx$不存在，则$\int_{a}^{x} f(x)dx$发散。

（三）函数$f(x)$在区间内一点c处无界

若$f(x)$在$[a,c]$及$[c,b]$上连续，而$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，且广义积分$\int_{a}^{c} f(x)dx$与$\int_{c}^{b} f(x)dx$都收敛，则广义积分$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{b} f(x)dx$。

如果$\int_{a}^{c} f(x)dx$及$\int_{c}^{b} f(x)dx$至少有一个发散，则称广义积分$\int_{a}^{b} f(x)dx$发散。

注意：无界函数的广义积分，在形式上与定积分没有区别，计算时注意对它的识别。

第四节　定积分的应用

一、曲边梯形的面积计算

（一）x 型平面图形

若由 $y=f(x)(f(x)\geq 0), x=a, x=b$ 及 $y=0$ 围成平面图形称为 x—型平面图形。其面积元素 $dA=f\left(x\right)dx$，则 x 型平面图形的面积为 $A=\int_a^b f\left(x\right)dx$。

由曲线 $y=f_1\left(x\right), y=f_2\left(x\right)(f_1\left(x\right)\leq f_2\left(x\right))$ 及直线 $x=a, x=b$ 围成的平面图形，其面积元素为 $A=\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$，于是 $A=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$

（二）y—型平面图形

设由曲线 $x=\varphi(y)$ 及直线 $y=c, y=d$ 围成的平面图形，称为 y—型平面图形，其面积元素为 $dA=\varphi(y)dy$，则 y—型平面图形的面积为 $A=\int_c^d \varphi(y)dy$。

由曲线 $x=\varphi_1\left(y\right), x=\varphi_2\left(y\right)$ 及直线 $y=c, y=d$ 围成的平面图形，其面积元素为

$dA=\left[\varphi_2\left(y\right)-\varphi_1\left(y\right)\right]dy$，于是 $A=\int_c^d\left[\varphi_2\left(y\right)-\varphi_1\left(y\right)\right]dy$

二、旋转体的体积计算

（一）绕 x 轴旋转的旋转体的体积计算

由连续曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a, x=b, x$ 轴围成的曲边梯形，绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积为 $V=\int_a^b \pi f^2(x)dx$。

（二）绕 y 轴旋转的旋转体的体积计算

由曲线 $x=\psi(y)$,直线 $y=c, y=d, y$ 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为 $V=\int_c^d \pi\psi^2\left(y\right)dy$

三、已知平行截面面积的立体的体积

设一物体被垂直于某直线的平面所截的平面面积可求，则该物体可用微元法求体积.

不妨设上述直线为 x 轴，则在 x 处的截面积 $A(x)$ 是 x 的已知连续函数，求该物体介于 $x=a$ 和 $x=b$（$a<b$）之间的体积。在 $[x, x+dx]$ 上视 $A(x)$ 不变，即把 $[x, x+dx]$ 上的立体薄片近似看作 $A(x)$ 为底，dx 为高的柱体，得: $dV=A\left(x\right)dx$，于是 $V=\int_a^b A\left(x\right)dx$。

思考题：

（1）　如何利用极限思想解决实际中的总量问题？

（2）　不定积分和定积分之间的关系是如何建立的？

（3）　牛顿莱布尼兹公式体现的数学美是什么？

（4）　如何理解原函数的作用？

（5）　如何判断广义积分的收敛和发散，若收敛，如何求其值？

第十讲　概率初步(1)——偶然中蕴含必然，直观判断与理性分析

本讲知识点：

样本空间，随机事件关系及运算，频率，概率的统计定义，古典概率，几何概型，概率的公理化定义，概率的性质，概率加法公式

本讲基本要求：

1．了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，熟练掌握事件之间的关系和运算；

2．了解概率的定义(古典概率、几何概率、统计定义和概率的公理化定义)；

3．掌握古典概率计算方法；会利用几何概型计算概率；

4．会利用概率性质进行概率计算；

本讲重点与难点：

重点：随机事件的关系及运算、古典概率、几何概率、概率的性质、概率加法公式

难点：随机事件的关系及运算、古典概率

学时分配：3 学时

教学内容：

第一节　概率问题概述

一、各行业中的概率问题

（一）概率（probability）的直观含义

（二）天气预报

（三）保险精算

（四）服务行业

（五）自然灾害

二、概率统计的发展历史

（一）描述统计

（二）推断统计

三、有趣的概率问题

（一）分赌本问题

（二）生死签问题

（三）密码破译问题

（四）圆周率问题

第二节　随机事件的关系及其运算

一、随机事件的关系

（一）事件的包含：

如果事件A发生必然导致事件B发生，即属于A的每一个基本事件也都属于B，就称B包含A，或称A包含于B。记作$B \supseteq A$或$A \subseteq B$。

（二）事件的相等

若$B \supseteq A$，且$A \supseteq B$，则称A与B相等。记作$B = A$。

（三）事件的并（和）

两个事件A、B至少有一个发生，即"A或B"，称为A与B的并（和）。记作$A \bigcup B$或$A+B$。类似的，$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生，称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$的并（和）。记作$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$（或$\sum_{k=1}^{n} A_k$）。

（四）事件的交（积）

两个事件A与B同时发生，即"A且B"，称为A与B的交（积）。记作$A \bigcap B$或$A\ B$。

类似的，$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生，称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$的交（积）。记作$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$（或$\prod_{k=1}^{n} A_k$）。

（五）事件的差

如果事件A发生而事件B不发生，称为A与B的差。记作$A - B$。

（六）互不相容事件

如果事件A与事件B不能同时发生，即$AB = \Phi$，则称A与B互不相容（或互斥）。

（七）对立事件

如果事件A与事件B有且仅有一个发生，即$A + B = \Omega$且$AB = \Phi$，则称A是B的对立事件，或B是A的对立事件。A的对立事件记作$\overline{A}$，有$\overline{A} = B$。

（八）完备事件组

如果一组事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$满足$\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega$，且$A_i A_j = \Phi (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$为一个完备事件组。

二、随机事件的关系的运算规律

对于任意事件 A,B,C 有：

1．交换律：A+B=B+A；AB=BA

2．结合律：A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C；ABC=A(BC)=(AB)C

3．分配律：A(B+C)=AB+AC；A(B-C)=AB-AC

4．对偶律(德摩根律)：$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$；$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

交换律、结合律、分配律、对偶律都可推广到任意多个事件的情形。

第三节　随机事件的概率定义及计算

一、统计概率

（一）频率的稳定——统计概率

（二）蒲丰投针实验——圆周率的估计

二、古典概型

若随机试验满足下述两个条件：

（1）它的样本空间Ω中只有有限多个样本点；

（2）每个样本点出现的可能性相同。

则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{A 中所包含的样本点数}}{\Omega\text{中所包含的样本点总数}}\text{。}$$

称这种试验为等可能随机试验或古典概型试验，所得到的概率为古典概率。

三、概率的公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω，按照某种方法，对每一事件 A 都赋予一个实数，且满足以下公理：

1．非负性：$P(A)\geq 0$。 2．规范性：$P(\Omega)=1$。

3．完全可加性：若可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots\text{。}$$

则称 A 所对应的实数 $P(A)$ 是事件 A 的概率。

四、概率性质

利用概率的公理化定义，可以得到如下的概率性质。

（一）若事件 A 与事件 B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$。

推广：若 n 个事件两两互斥，则 $P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$。

（二）对任意两个事件 A 与 B，有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$。

对任意三个事件 A、B、C，有

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\text{。}$$

（三）事件 A 的对立事件的概率为 $P(\bar{A})=1-P(A)$。

五、随机事件概率计算实例

（一） 调查中的概率计算

（二） 赌博的陷阱

（三） 生日问题

（四） 不同游戏规则的概率分析

（五） 产品检验问题

思考题：

（1） 如何定量刻画生活中一些随机问题的规律？

（2） 统计概率、古典概率、概率的公理化定义各自的优缺点是什么？

（3） 利用随机事件之间的关系进行概率计算的优点是什么？

（4） 试举例说明，如何利用概率来揭示骗局或谎言？

第十一讲　概率初步(2) ——随机性问题的概率计算与理性分析

本讲知识点：

条件概率，概率乘法公式，事件的独立性，全概公式及贝叶斯公式，贝努利实验，二项概型

本讲基本要求：

1．理解条件概率的概念；

2．掌握概率的乘法公式、全概公式及贝叶斯公式，并会用这些公式进行概率计算；

3．理解随机事件独立性的概念，并会用事件的独立进行概率计算；

4. 掌握贝努利实验条件，掌握利用二项概型进行概率计算

本讲重点与难点：

重点：条件概率、三大公式(乘法公式、全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式)和独立性。

难点：全概率公式与贝叶斯公式

学时分配：3 学时

教学内容：

第一节　条件概率与乘法公式

一、条件概率的定义

在实际问题中，常常需要计算在某个事件B已经发生的条件下，另一个事件A发生的概率。在概率论中，称此概率为B已发生的条件下A发生的条件概率，简称为A对B的条件概率，记为$P(A|B)$。由于增加了“事件B已经发生”的条件，一般来说$P(A|B)\neq P(A)$。

二、概率乘法公式

设有两个事件A、B，由条件概率的定义，可得到如下的乘法公式。

1．若$P(B)>0$，则 $P(AB)=P(B)P(A|B)$；

2．若$P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$。

此公式还可以推广到多个事件相交的情况：

设n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$，且$P(A_i)>0$，则

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$。

三、随机事件独立

若两个事件A、B的发生与否互不影响，即若$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A和B是相互独立的。关于事件的独立有如下性质：

1．若两个事件A、B独立，则A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$中的每一对事件都相互独立。

2．若一组事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，则$A_1,A_2,\cdots,A_n$中“至少有一个发生”的概率为$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$。

四、加法公式与乘法公式应用实例

1.“顺序抽签”是否公平
2.“三个臭皮匠赛过一个诸葛亮”的概率分析
3. 哪个裁判组正确裁定的概率大

第二节　全概公式和贝叶斯公式

一、全概率公式——由原因推结果

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个两两互斥的事件组，且 $P(A_i) > 0$（i =1，2，…，n）。另有一事件 B，它总是与 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之一同时发生，即 $B = \sum_{i=1}^{n} BA_i$。根据乘法公式与概率可加性，有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)$$

称上述公式为全概公式，满足上述条件的 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组。

二、贝叶斯公式——已知结果求原因

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个两两互斥的事件组，且 $P(A_i) > 0$（i =1，2，…，n），另有一事件 B，它总是与 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之一同时发生，则 $P(A_i | B) = \dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$。

三、全概公式与贝叶斯公式应用实例

1.犯罪现场的血迹检测分析
2.疾病普查中的概率问题
3.血型问题
4.赌徒破产模型

四、概率推理案例分析

（一）归纳推理与法庭证明
（二）被告有罪、无罪的概率分析
（三）概率推理与证人识别问题
（四）测谎结论的概率分析
（五）利用 CAT 扫描结果对被告进行精神病的无罪辩护

第三节　贝努利试验与二项概型

一、n 重贝努利试验

若某试验可独立重复进行 n 次，且每次试验结果出现的概率都不依赖于其它各次试验的结果，就称这样的试验为独立重复试验，或称为 n 重贝努利试验。n 重贝努利试验满足如下三个条件：

（1）试验可以独立重复进行 n 次；　（2）每次试验只有两个可能结果 A 和 $\overline{A}$；
（3）事件 A 在每次试验中出现的概率都是 $P(A) = p$。

二、二项概型

在n重贝努利试验中，根据概率的计算公式，可得出“n次试验中事件A恰好出现k次”的概率为$P(A)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}(k=0,1\cdots,n)$。

用X表示“n重贝努利试验中事件A出现的次数”，则X=0，1，2，…，n，且有

$$P(X=k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}\qquad(k=0,1\cdots,n)。$$

就称X服从参数为n和p的贝努利分布（或称二项分布）。记作$X\sim B(n,p)$。

三、二项概型应用实例

（一）陪审团的组成是否存在种族歧视

（二）碰运气能否通过英语四级考试

（三）某种新药是否有效

思考题：

（1）　如何利用随机事件之间的关系进行各种概率计算？

（2）　试举例说明，如何利用概率对法学和诉讼中的一些随机问题进行实证分析？

第十二讲　随机变量分布

本讲知识点：

1.随机变量的概念，随机变量的分布函数概念及其性质；

2.离散型随机变量及其概率分布，离散型随机变量常见分布；

3.连续性随机变量及其概率密度函数，连续性随机变量常见的分布；

本讲基本要求：

1.理解随机变量及其分布函数的概念，掌握其性质；

2.理解离散型随机变量的概念及其分布列的概念和性质；

3.理解连续型随机变量的概念及其概率密度函数的概念和性质；

4.会利用分布列、概率密度函数及分布函数计算有关事件的概率；

5.掌握二项分布，泊松(Pisson)分布，指数分布，正态分布；

本讲重点与难点：

本章重点：离散型随机变量及其分布律、分布函数、连续型随机变量及其分布函数、概率密度函数、二项分布、泊松分布、指数分布、正态分布及其查表计算。

本章难点：分布函数的概念和求法，概率密度函数的概念。

学时分配：3 学时

教学内容：

第一节　随机变量及其概率分布

一、随机变量的概念

（一）随机变量的定义

设 E 为随机试验，它的样本空间为 Ω={ω}。若对于每一个样本点 ω∈Ω，都有唯一确定的实数 X (ω)与之对应，则称 X(ω)是一个随机变量(可简记为 X)。常用大写字母 X，Y，Z 等表示。

（二）引入随机变量的意义

（三）随机变量的分类

1．离散型随机变量与非离散型随机变量（主要是连续型随机变量）

2．一元随机变量与多元随机变量

二、离散型随机变量及其分布

（一）离散型随机变量概率分布的定义

1．一个随机变量的一切可能的取值为有限个或可列无穷多个，则称它为离散型随机变量。

2．X 是一个离散型随机变量，其一切可能值为$\{x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots\}$，且 X 取各值时的概率为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\ldots$ 其中 $p_k \ge 0 (k = 1, 2, \cdots)$，且$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$，则称上式为 X 的概率分布。

常记为：

$$X \sim \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{Bmatrix}$$

3．对于任意实数 $a<b$，有 $P(a \le X \le b)=\sum_{a \le x_k \le b} P(X=x_k)$

（二）离散型随机变量概率分布的表示方法

1．列表法

2．图示法

3．公式法

三、连续型随机变量及其分布

（一）连续型随机变量及其概率密度函数

对于随机变量 X,如存在非负可积函数 $f(x)$,使得对于任意实数 x,有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，则称 X 为连续型随机变量， $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数。$F(x)$ 为其分布函数。

（二）概率密度函数的性质

性质 1: $f(x) \ge 0, \quad -\infty < x < +\infty$；

性质 2: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$；

性质 3: 对于任意实数 $a,b(a<b)$，都有 $P(a<X\le b)=\int_a^b f(x)dx$

注意：

连续型随机变量 X 取任何给定值的概率等于 0，则 $P\{X=a\}=0$。所以有

$P(a<X\le b)=\int_a^b f(x)dx = P(a\le X\le b)=P(a\le X<b)=P(a<X<b)$

（三）连续型随机变量的分布函数与概率密度的关系

对于一个随机变量 X，其分布函数 $F(x)$ 与概率密度 $f(x)$ 之间有如下关系：

对于 $f(x)$ 的任一连续点 x，均有 $f(x)=F'(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}$

第二节　几个常见随机变量的概率分布

一、二项分布

用 X 表示“n 重贝努利试验中事件 A 出现的次数”，则 X =0，1，2，…， n，且有

$P(X=k)=C_n^k P^k (1-P)^{n-k} \qquad (k=0,1\cdots,n)$。

就称 X 服从参数为 n 和 p 的贝努利分布（或称二项分布）。记作 $X \sim B(n,p)$。

二、泊松分布

（一）泊松分布特点

设随机变量 X 所有可能取的值为 0，1，2， … ，且概率分布为

$P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots$ ，

其中 λ>0 是常数，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布。记作 $X \sim P(\lambda)$。

泊松分布中的参数 λ 既是均值也是方差，可通过总结过去的记录得到。有关概率计算可查表。

（二）二项分布的泊松近似

当 n 很大， p 很小时，有以下近似公式：$C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} \approx \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，其中 $\lambda = np$。

我们把在每次试验中出现概率很小的事件称作稀有事件，如地震、火山爆发、特大洪水、意外事故等等。在 n 重贝努利试验中，稀有事件出现的次数近似地服从泊松分布。

（三）.泊松分布应用实例

1．援助中心需要设置多少员工

2．维修人员配备是否合理

三、指数分布

如果随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$，则称 X 为服从参数为 λ（λ>0）的指数分布，记为 X～$e(\lambda)$,其分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

四、正态分布

（一）正态分布及其特点

1．正态曲线特点

若连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<\infty$，其中 μ 和 σ^2 都是常数，则称 X 服从参数为 μ 和 σ^2 的正态分布。记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。$f(x)$ 所确定的曲线叫正态曲线。称 $F(x)=P(X\le x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt \quad (-\infty<x<+\infty)$ 为 X 的分布函数。

正态分布由两个参数 μ 和 σ^2 唯一确定。其中 μ 为数学期望，σ^2 为方差。不同的 μ 和 σ^2 代表不同的正态分布。正态曲线具有如下性质：

性质 1：曲线关于直线 $x=\mu$ 对称；

性质 2：当 $x=\mu$ 时，$\varphi(x)$ 达到最大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$；

性质 3：曲线以 x 轴为渐近线；

性质 4：当 $x=\mu\pm\sigma$ 时，曲线有拐点；

性质 5：固定 μ，σ 越小，曲线“越瘦越高”；σ 越大，曲线“越矮越胖”。

2.标准正态曲线

当 $\mu=0,\sigma=1$ 时的正态分布，称为标准正态分布。记作 $X\sim N(0,1)$。其密度函数和分布函数常用 $\varphi_0(x)$ 和 $\Phi_0(x)$ 表示。其中

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty；\quad \Phi_0(x)=P(X\le x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

标准正态分布的概率计算问题可以查表。

3.正态分布的标准化

任何一个非标准的正态分布都可以通过下面定理，经过线性变换转化为标准正态分布。

定理：设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$。

4.正态分布的 3σ 准则

由标准正态分布的概率分布表，查表计算可以求得，当 $X\sim N(0,1)$)时，有

$P(|X|\le 1)=P(-1\le X\le 1)=2\Phi_0(1)-1=0.6826$；

$P(|X|\le 2)=P(-2\le X\le 2)=2\Phi_0(2)-1=0.9544$；

$P(|X|\le 3)=P(-3\le X\le 3)=2\Phi_0(3)-1=0.9974$。

这说明，X 的取值几乎全部集中在$[-3,3]$区间内，超出这个范围的可能性仅占不到 0.3%。

将上述结论推广到一般的正态分布，当$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$时，标准化后计算仍有

$P(|Y-\mu|\le\sigma)=P(|\frac{Y-\mu}{\sigma}|\le 1)=2\Phi_0(1)-1=0.6826$；

$P(|Y-\mu|\le 2\sigma)=P(|\frac{Y-\mu}{\sigma}|\le 2)=2\Phi_0(2)-1=0.9544$；

$P(|Y-\mu|\le 3\sigma)=P(|\frac{Y-\mu}{\sigma}|\le 3)=2\Phi_0(3)-1=0.9974$。

可见，正态随机变量的取值几乎都集中在区间$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$内，只有 0.003 的可能性会发生意外。因此，我们有相当把握认为，正态随机变量的取值就在区间$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$内。这个经验原则在统计学上被称作“3$\sigma$准则”（或称三倍标准差原则）。使用“3$\sigma$准则”发生错误的可能性小于 0.003。

（二）二项分布的正态近似

当n很大，p较小时，二项分布近似泊松分布。但如果n很大，而p又不很小，那么可以证明，二项分布近似于正态分布。

设随机变量Y服从参数为n和p（0<p<1）的二项分布，则对任意实数 x，有

$$P(\frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x)\approx\Phi_0(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt。$$

即当n很大，0<p<1 是一个定值时（或者说，$np(1-p)$也不太小时），二项随机变量Y的分布近似服从正态分布$N(np,np(1-p))$。

（三）正态分布的应用

1.确定产品的保修期限

2.预测考试的录取分数线

3.保险公司的盈利分析

思考题：

（1） 如何利用随机变量分布进行各种概率计算？

（2） 试举例说明哪些变量的分布服从正态分布？

第十三讲　随机变量的数字特征——数学期望与方差

本章知识点：

1．数学期望的定义及其性质，随机变量函数的数学期望；

2．随机变量方差的定义及其性质；

3．几种常见随机变量的数学期望与方差。

本章基本要求：

1．理解数学期望与方差的概念，掌握它们的性质与计算方法；

2．会计算随机变量函数的数学期望；

3．熟记二项分布，泊松分布，正态分布的数学期望与方差，知道均匀分布，指数分布的数学期望与方差；

重点与难点：期望、方差概念、性质及其应用，

学时分配：3 学时

第一节　数学期望

一、数学期望的概念

（一）概念引例

（二）离散型随机变量的数学期望

设离散型随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=x_k\}=p_k$ ，k=1,2,…，如果无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称此级数的和为随机变量 X 的数学期望(或均值)，记作 E(X)或 EX，即 $EX=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 。

（三）连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛，则称此积分值为随机变量 X 的数学期望，记作 EX，即 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 。

如果上述级数或积分不绝对收敛，则称此随机变量的数学期望不存在。

二、数学期望值的性质

性质 1. $EC=C$ （C 为常数）；

性质 2. $E(X+C)=EX+C$ （C 为常数）；

性质 3. $E(CX)=C\cdot EX$ （C 为常数）；

性质 4. $E(aX+b)=a\cdot EX+b$ （a 、b 为常数）；

（5）对两个随机变量 X_1 和 X_2，有 $E(X_1+X_2)=EX_1+EX_2$ 。

三、随机变量函数的数学期望

设 $y=g(x)$ 为连续函数，而 X 是任一随机变量，则随机变量 $Y=g(X)$ 的数学期望可以通过随机变量 X 的概率分布直接求出：$EY=Eg(X)=\begin{cases}\sum_k g(x_k)P\{X=x_k\} & X\text{是离散的}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx & X\text{是连续的}\end{cases}$

四、数学期望的应用

（一）赌场的获利分析
（二）如何确定保险赔偿金
（三）确定化验方案
（四）智力竞猜节目的期望奖金

第二节　随机变量的方差

一、方差的概念及其简化计算公式

（一）概念引例
（二）方差定义
设 X 是一随机变量，如果数学期望 $E(X-EX)^2$ 存在，则称之为 X 的方差，记作 DX。
$\sqrt{DX}$ 称为 X 的标准差。
（三）方差计算的简便公式：$DX=EX^2-(EX)^2$

二、方差的性质

性质 1.设 C 是常数，则 DC=0
性质 2.设 X 是随机变量，C 是常数，则 D(X+C)=DX，$D(cX)=c^2\cdot DX$
性质 3.设随机变量 X 与 Y 相互独立，则 $D(X\pm Y)=DX+DY$
性质 4. $DX\geq 0$，并且 DX=0 当且仅当以概率 1 取常数，即 $P\{X=c\}=1$，其中 $c=EX$

三、常用随机变量的数学期望与方差

（一）如果 X 是服从 0—1 分布的随机变量，即 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$
则 $EX=p,DX=p(1-p)$
（二）如果 X～$B(n,p)$，则 $EX=np$，$DX=np(1-p)$
（三）如果 X～$P(\lambda)$，则 $EX=DX=\lambda$
（四）如果 X～$U(a,b)$，则 $EX=\frac{a+b}{2}$，$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$
（五）如果 X～$e(\lambda)$，则 $EX=\frac{1}{\lambda}$，$DX=\frac{1}{\lambda^2}$
（六）如果 X～$N(\mu,\sigma^2)$，则 $EX=\mu$，$DX=\sigma^2$

第三节　风险型问题的决策分析

一、民事案件的诉讼与和解方式的选择

二、上市公司经营行为的模式选择

三、不同就业计划的决策分析

四、新型产品的投资生产决策分析

第三部分　课堂外教学活动

一、与数学有关的优秀影视欣赏

1. 盗梦空间；
2. 数学故事（英 BBC）；
3. 极限空间；
4. 牛津杀手；
5. 决胜 21 点

二、与数学软件应用和科技论文写作有关的讲座

1. 数学公式编辑器的使用；
2. MATLAB 软件简单使用；
3. 科技论文写作

《高等数学》教学大纲(2012 年)

刘淑环　编写

目 录

一、课程基本信息......6
二、课程性质与设置目的......6
三、课程教学内容及学时分配......6
四、课程教学方式......6
五、课程考核方式及成绩评定......7
六、教材、参考书......7
参考书目：......7
七、大纲编写......7
第一部分 微积分（33 学时）......8
第一章 函数及其应用......8
第一节 函数......8
一、函数的概念......8
二、函数的性质......8
三、显函数与隐函数......9
四、反函数......9
五、复合函数......9
六、分段函数......9
七、初等函数......9
第二节 经济学中常见的几类函数......10
一、成本函数、收益函数及利润函数......10
二、需求函数与供给函数......11
三、利息函数......11
第二章 极限与连续......12
第一节 极限的概念......12
一、数列极限的概念......12
二、函数的极限......13
第二节 无穷小量与无穷大量......14
一、无穷小量......14
二、无穷大量......14
三、无穷小量与无穷大量的关系......15
第三节 极限的运算法则......15
一、极限的四则运算法则......15
二、极限计算方法......15
第四节 两个重要极限......16
一、极限存在的两个准则......16
二、两个重要极限......16
三、连续复利......16
第五节 函数的连续性......17
一、函数在某一点连续与间断......17

二、函数 $f(x)$ 在区间上连续 17
三、函数间断点及其分类 18
四、闭区间上连续函数的性质 18
第三章　导数与微分 19
第一节　导数的概念 19
一、引例 19
二、导数概念 20
三、可导与连续的关系 21
第二节　导数的基本公式与运算法则 21
一、函数和、差、积、商求导法则 21
二、复合函数求导法则 21
三、隐函数求导法则 21
四、取对数求导法 21
五、分段函数求导 21
六、基本初等函数的求导公式 22
第三节　高阶导数 22
一、高阶导数的定义 22
二、高阶导数的求法 22
第四节　微分 22
一、微分的定义 22
二、微分法则 23
三、微分的近似计算 24
第四章　导数的应用 25
第一节　中值定理 25
一、罗尔(Rolle)定理 25
二、拉格朗日(Lagrange)中值定理 25
三、柯西(Cauchy)中值定理 26
第二节　洛必达法则 26
一、$\frac{0}{0}$ 型不定式极限 26
二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限 26
三、其他未定式的极限 27
第三节　函数单调性与极值问题 27
一、函数单调性判断 27
二、函数极值 27
三、函数最值 28
第四节　曲线的凹向与拐点 28
一、曲线凹向的定义 28
二、曲线凹向的判定定理 28
三、拐点及其求法 28

第五节　函数图形的作法......29
一、渐近线......29
二、曲线做图的一般作法......29
第五节　变化率及相对变化率在经济中的应用......29
一、函数绝对变化—边际函数......29
二、函数的相对变化率——函数的弹性（弹性分析）......30
第五章　不定积分......32
第一节　不定积分的概念与性质......32
一、原函数......32
二、不定积分的定义......32
三、不定积分的几何意义......32
四、不定积分的性质......32
五、基本积分公式......33
第二节　换元法......33
一、第一类换元法......33
二、第二换元积分法......34
第三节　分部积分法......34
第六章　定积分......35
第一节　定积分的概念......35
一、曲边梯形的面积......35
二、定积分的定义......36
三、定积分的几何意义......36
四、定积分的性质......36
第三节　定积分与不定积分的关系......37
一、变上限函数......37
二、微积分基本定理(牛顿—莱布尼兹公式)......37
第四节　定积分的计算......38
一、换元法......38
二、两类特殊的定积分......38
三、定积分的分部积分公式......38
第五节　广义积分......38
一、无限区间上的积分......38
二、无界函数的积分......39
第六节　定积分的应用......40
一、平面图形的面积......40
二、旋转体的体积计算......40
三、已知平行截面面积的立体的体积......40
四、经济应用问题举例......40
第二部分　概率论初步（21 学时）......41
第一章　随机事件及其概率......41
第一节　随机事件......41
一、概率论序言......41
二、随机试验与随机事件......41

三、随机事件间的关系与运算........42
第二节　随机事件概率的定义........43
一、概率的统计定义........43
二、概率的古典定义........43
三、概率的公理化定义与性质........43
第三节　条件概率与全概公式........44
一、条件概率........44
二、乘法公式........44
三、全概公式与贝叶斯公式........44
第四节　贝努利概型........44
一、随机事件的独立性........44
二、贝努利概型........45
第二章　一元随机变量及其分布........46
第一节　随机变量与分布函数........46
一、随机变量的概念........46
二、随机变量的分布函数........46
第二节　离散型随机变量及其概率分布........47
一、离散型随机变量的概率分布........47
二、几种重要的离散型随机变量........47
三、几个分布之间的关系........47
第三节　连续型随机变量及其概率密度........48
一、连续型随机变量的概率密度........48
二、几种重要的连续型随机变量........48
三、拉普拉斯定理——二项分布的正态近似........49
第四节　随机变量函数的概率分布........50
一、问题的提出........50
二、离散型随机变量函数的概率分布........50
三、连续型随机变量函数的概率分布........50
第三章　随机变量的数字特征........51
第一节　数学期望........51
一、数学期望的概念........51
二、数学期望的性质........51
三、随机变量函数的数学期望........51
四、数学期望的应用........52
第二节　方差........52
一、方差的概念及其简化计算公式........52
二、方差的性质........52
三、常用随机变量的数学期望与方差........52
第三部分　线性代数初步（选修21学时）........53
第一章　行列式........53
第一节　二阶、三阶行列式........53
一、二阶行列式的引入与计算........53
二、三阶行列式的引入与计算........54

三．n 阶行列式的定义 54
第二节　行列式的性质 54
第三节　行列式按行（列）展开 55
一、余子式与代数余子式 55
二、行列式按行（列）展开法则 55
三、关于代数余子式的重要性质 55
第四节　克莱姆法则 55
一、引例 55
二、克莱姆法则 56
三、重要定理 56
第二章　矩阵与线性方程组 57
第一节　矩阵的概念 57
一、矩阵概念的引入 57
二、矩阵的定义 57
三、几种特殊矩阵 58
第二节　矩阵的运算 58
一、矩阵的加法 58
二、数与矩阵的乘法 59
三、矩阵的乘法 59
四、矩阵的其它运算 60
第三节　逆矩阵 60
一、概念的引入 60
二、逆矩阵的概念和性质 60
三、用逆矩阵解矩阵方程 61
四、逆矩阵的计算方法 61
第四节　矩阵的初等变换 61
一、矩阵的三种初等行（列）变换 61
二、矩阵等价 61
三、初等矩阵 61
四、行简化阶梯形矩阵和标准形矩阵 62
五、利用初等变换法求矩阵的逆矩阵 62
第五节　矩阵的秩 62
一、矩阵的 k 阶子式 62
二、矩阵秩的定义 62
三、矩阵秩的求法 62
第六节　线性方程组的解法 63
一、消元法解线性方程组 63
二、线性方程组的矩阵表示 63
三、初等行变换法解线性方程组 63
四、线性方程组有解的判断定理 63

一、课程基本信息

1.课程名称：高等数学　　2.英文名称：Higher Mathematics
3.课程号：309010073　　4.适用对象：社会学院社会类专业
5.总学时: 54 学时　　6.学　分: 3 学分
7．开课学期：第二学期　　8.开课单位：科学技术教学部数学教研室

二、课程性质与设置目的

《高等数学》是为我校社会学院社会学专业开设的一门数学基础理论课。通过本课程的学习，使学生获得微积分、概率论及线性代数等方面的基本概念、基本理论和基本运算技能。

《高等数学》课程既是一门重要的基础课和工具课，更是一门素质课。由于学时有限，教学内容较多，教学重点应放在“掌握概念，强化应用，培养能力，提高素质”上,通过教学要实现传授知识和发展能力两方面的目的，能力培养贯穿教学全过程。

教学中结合教学内容及学生特点，选择适宜的教学方法与教学手段，有重点地营造有利于学生能力发展的氛围，启发学生思维，促进学生能力的提高。通过教学内容的逐渐展开，逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和自学能力，特别是注意培养学生具有综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力。为学生进一步获得高等数学知识奠定必要的数学基础，也为学生后续的专业课程学习及专业研究提供必要的数学方法论支持。

三、课程教学内容及学时分配

教学内容包括一元微积分、概率论初步及线性代数三部分。其中一元微积分部分教学在前，可为后续的概率论部分教学提供理论基础。课时分配为：微积分部分 33 学时，概率论初步 21 学时。线性代数教学内容视学生情况选学。

微积分部分主要以一元微积分学为核心内容，首先介绍微积分研究的对象—函数以及微积分研究的重要基础—极限论，并在此基础上建立一元函数导数、微分、不定积分、定积分、广义积分的概念和理论。概率论初步主要介绍随机事件的概率，一元随机变量的概率分布，随机变量的数字特征。概率论初步着重对客观的随机现象提出各种不同的理想化的数学模型并研究其内在的性质与相互联系。线性代数部分主要介绍行列式、矩阵、初等变换和线性方程组的理论。

四、课程教学方式

教学方式应注重启发式、引导式。采用“引出问题，启发思路，重点分析，课堂讨论，课外探索，自行归纳”的教学形式，将课堂讲授、课堂讨论、课后练习与学生自学相结合。使学生在教师引导下，自己从前人研究的问题、分析问题的过程、演绎推导的结果中，体会和领悟这些人类高级心智文明的成果，使学生自己真正学懂数学，而不是被“教会”数学；同时希望学生通过研究式的钻研、探索乃至犯错误的过程中，培养从错纵复杂的现象事理中和繁杂无序的结果数据中，寻找与总结内在关系和规律的能力，并且体会科学研究的艰辛和乐趣，培养在科学研究和事理处理上百折不挠、持之以恒的毅力和意志。

一元微积分部分是一门形数结合的数学学科，在课堂教学中，尽量采用多媒体教学,多用图形和实例引入来说明和描述微积分中的一些主要概念。概率论部分与现实生活结合紧密，教学中尽可能多引入各种实例。总之，课堂教学要尽量用问题驱动法逐步展开教学,把学生吸引到教学内容中去, 并引导学生讨论问题，调动学生听课的积极性，锻炼学生的表达能力，提高课堂教学效率。在讲授传统内容时，运用现代数学的观点、概念、方法以及术语等符号，加强与其它不同分支之间的相互渗透，不同内容之间的相互联系,淡化运算技巧训练。

说明：本大纲中要求较高的教学内容用“理解”、“掌握”、“熟悉”等词表述，要求较低的内容用“了解”、“会”等词表述。

五、课程考核方式及成绩评定

采取平时动态考核与期末闭卷考试相结合，以百分制给出学生的成绩评定。试题的难度可分为易、较易、较难、难四个等级，这四个等级在每份试卷中的试题所占分数比例依次为2：4：3：1。试题主要有单项选择题、填空题、简单计算题、综合应用题、证明题等题型。

六、教材、参考书

教材：《高等数学》刘淑环等编，华文出版社

参考书目：

[1]《微积分》赵树源主编，中国人民大学出版社

[2] 《高等数学》第六版，上册，同济大学应用数学系主编

[3] 《数学方法与应用》，刘淑环主编，清华大学出版社

[4] 《概率论与数理统计》袁荫棠编，中国人民大学出版社

[5] 概率论与数理统计(面向21世纪课程教材—第2版—北京)，龙永红主编，高等教育出版社，2004年8月第二次印刷

七、大纲编写

本大纲由刘淑环老师编写。在实际教学中，由于学生情况不同，在实际教学过程中可能会在学时分配和内容详略方面有所调整。

第一部分　微积分（33 学时）

第一章　函数及其应用

本章教学基本要求：

1．理解函数的概念，会求函数的定义域，会建立简单应用问题的函数；

2．了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性；

3．了解显、隐函数、反函数、分段函数的概念，理解复合函数的概念；

4．掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念；

5．了解经济学中常见的几类函数。

本章知识点、重点与难点：

知识点：函数关系、函数的几种简单性质、反函数、复合函数、初等函数、分段函数，经济学中常见的几类函数。

重点：基本初等函数的图像及性质，复合函数的概念及分解

难点：基本初等函数的图像及性质，复合函数的分解

学时分配：3 学时

第一节　函数

一、函数的概念

若 D 是一个非空实数集合， 设有一个对应规则 f，使对每一个 $x \in D$， 都有一个确定的实数 x 与之相对应， 则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$y = f(x) \quad x \in D$

其中 x 称为自变量， y 称为因变量，D 称为函数的定义域，也可以记作 $D(f)$。

二、函数的性质

（一）奇偶性

1. 奇函数

给定函数 $y = f(x)$，其定义域 $D(f)$ 关于原点对称，如果对所有的 $x \in D(f)$，有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $y = f(x)$ 为奇函数。奇函数图形关于原点对称。

2. 偶函数

给定函数 $y = f(x)$，其定义域 $D(f)$ 关于原点对称，如果对所有的 $x \in D(f)$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $y = f(x)$ 为偶函数。偶函数图形关于 y 轴对称。

（二）周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 T，使得 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称此函数为周期函数。T 为 $y=f(x)$ 的周期。若 T 为函数 $y=f(x)$ 的一个周期，则 $kT\,(k \in Z^+)$ 也是 $y=f(x)$ 的周期.通常我们说周期函数的周期指的是函数的最小正周期.

（三）单调性

如果函数 $y=f(x), x\in D$，对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调减少的。

严格单调函数的图像与任意平行于横轴的直线至多有一个交点。

（四）有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在正数 M 对于任意的 $x\in(a,b)$，都有 $|f(x)|\le M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的。

注意:同一函数在自变量的不同范围上的有界性不一定相同。

三、显函数与隐函数

（一）显函数：因变量是用自变量表达式表示出来的函数。

（二）隐函数：因变量与自变量的对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 表示的函数。

四、反函数

（一）定义

设 $y=f(x)$ 是定义在 $D(f)$ 上的一个函数，值域为 $Z(f)$。如果对于每个 $y\in Z(f)$，有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，其对应规则记作 f^{-1}，这个定义在 $Z(f)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数。反函数的定义域为原函数的值域。

（二） 性质

1.定义域与值域之间是一一对应关系；

2.函数在某个区间若为单调函数，则函数在该区间必存在反函数。

五、复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$， $Z(\varphi)\cap D(f)$ 非空，则称 $y=f(\varphi(x))$ 为复合函数。x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量。

六、分段函数

在定义域的不同部分用不同表达式表达的函数。

七、初等函数

（一）基本初等函数

1.常函数： $y=C$。

常数函数的定义域为一切实数，其图形是一条平行于 x 轴的直线。

2.幂函数： $y=x^{\alpha}$ (α 为任何实数)

3.指数函数： $y=a^x \quad (a>0, a\ne 1)$

指数函数的定义域为（-∞，+∞），值域为（0，+∞）.当 $a>1$ 时，函数严格单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少。函数的图形都过（0，1）点， $y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 图形关于 y 轴对称。

$y=e^x$ 是工程上常用的指数函数，常数 e=2.7182818…

4.对数函数： $y=\log a^x \quad (a>0, a\ne 1)$

对数函数的定义域为（0，+∞）,值域为（-∞，+∞）.当 $a>1$ 时，函数严格单调增加;当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少，函数图形都过（1，0）点。

以 e 为底的对数称为自然对数，记作 $y = ln\,x$ 。

5.三角函数：

（1）正弦函数 $y = \sin x$ 。定义域为（-∞，+∞），值域为〔-1，1〕，它是以 2π 为周期的有界的奇函数。

（2）余弦函数 $y = \cos x$ 。定义域为（-∞，＋∞），值域为〔-1，1〕，它是以 2π 为周期的有界的偶函数。

（3）正切函数 $y = \tan x$ 。定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in Z)$ ，它是以 π 为周期的单调增加的奇函数（在一个周期内）。

（4）余切函数 $y = \cot x$ 。定义域为 $x \neq k\pi \quad (k \in Z)$,它是以 π 为周期的单调减少的奇函数（在一个周期内）.

此外，还有正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ 和余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ ，其图形性质从略。

6.反三角函数

（1）反正弦函数 $y = arcsin\,x$,定义域为〔-1，1〕，值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ，有界，单调增加，奇函数。它是正弦函数 $y = \sin x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的反函数.

（2）反余弦函数 $y = arccos\,x$ ，定义域为〔-1，1〕，值域为 $(0,\pi)$ ，有界，单调减少，偶函数。它是余弦函数 $y = \cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上的反函数.

（3）反正切函数 $y = arctan\,x$ ，定义域为（-∞，+∞），值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 。有界，单调增加，奇函数。它是正切函数 $y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的反函数。

（4）反余切函数 $y = arc\,cot\,x$ 定义域为（-∞,+ ∞），值域为 $(0,\pi)$ ，有界，单调减少，它是余切函数 $y = cot\,x$ 在 $(0,\pi)$ 上的反函数.

（二）初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或复合运算得来的、并且用一个式子表示的函数。凡不是初等函数的函数，我们都称之为非初等函数。高等数学讨论的函数主要是初等函数.

第二节　经济学中常见的几类函数

一、成本函数、收益函数及利润函数

（一）成本函数

总成本函数为 $C = C_0 + p(x)$ 。其中 C_0 为固定成本，指不受产量变化影响的成本，包括厂房、设备、管理费等。$p(x)$ 表示可变成本，指受产量变化影响的成本，是产量的函数，包括原材料、燃料、工人工次等，若 p 表示单位可变成本，则 $p(x) = px$

（二）收益函数

收益是指销售一定产品后所得的收入，由单价和销售量决定的。收益函数常用 $R(x)$ 表示，x 表示销量。

1.若单价是销售量的函数，则收益是销售量的函数。

2.若销售量是单价的函数，则收益是单价的函数。

（三）利润函数

收益函数与成本函数之差就是利润函数。若成本与收益都是产量的函数，则利润函数为

$L(x)=R(x)-C(x)$。

1.当$\boldsymbol{L(x)>0}$，即$\boldsymbol{R(x)>C(x)}$时，企业盈利；

2.当$\boldsymbol{L(x)<0}$，即$\boldsymbol{R(x)<C(x)}$时，企业亏本；

3.当$L(x)=0$，即$R(x)=C(x)$时，企业保本，并称此时的x_0为盈亏临界点。

二、需求函数与供给函数

（一）需求函数

产品需求量与产品价格之间的函数关系为需求函数，由$\boldsymbol{Q=Q(p), p>0}$表示。其中$\boldsymbol{Q}$为商品的需求量，$\boldsymbol{p}$为商品的价格。

一般地，需求量随价格上涨而减少，故需求函数通常是商品价格的单调递减函数。

（二）供给函数（供应函数）

产品供给量与产品价格之间的函数关系为供给函数，由$S=S(p)$表示。其中S为商品的需求量，p为商品的价格。

一般地，供给量随价格上涨而增加，故供给函数通常是商品价格的单调递增函数。

（三）供需平衡分析

随着价格的上涨，需求下降，供给增加，到一定时候二者达到平稳，此时的价格p_0称为均衡价格，即$Q(p_0)=S(p_0)$。

当$Q(p)>S(p)$时，供不应求，商品的价格就会有上涨的趋势；

当$Q(p)<S(p)$时，供过于求，商品的价格就会有下跌的趋势。

三、利息函数

（一）单利计算

只在本金上计算利息。p为本金，i为计息期的利率，n为计息期数，则n期的利息为$I=pin$，本利和为$A=p+I=p(1+in)$。

（二）复利计算

不仅在本金上计算利息，而且所生利息也计算利息。设p为本金，i为计息期的利率，n为计息期数，若每期结算 1 次，则n期本利和为

$$A=p(1+i)^n$$

n期利息为$I=A-p=p[(1+i)^n-1]$。

若每期结算m次，则n期本利和为$A_m=p(1+\dfrac{i}{m})^{mn}$，

利息为$I_m=A-p=p[(1+\dfrac{i}{m})^{mn}-1]$。

第二章　极限与连续

本章教学基本要求：

1．了解数列极限和函数极限（包括左极限与右极限）的概念；掌握数列极限的和函数极限的性质；

2．理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷大量与无穷小量的关系和性质；掌握无穷小量的比较方法；

3. 熟练掌握极限四则运算法则和计算方法；

4．了解极限存在的两个准则，掌握第一重要极限的证明，了解第二重要极限的证明方法；能熟练应用两个重要极限计算函数的极限；

5．理解函数在一点和在一区间（开区间和闭区间）连续性的概念（含左连续与右连续；理解连续函数的性质和初等函数的连续性；

6. 了解函数间断的概念；掌握函数间断点的计算；

7. 掌握闭区间上连续函数的性质以及简单的应用。

本章知识点、重点与难点：

知识点：数列与函数极限的概念，无穷小量的概念与基本性质，无穷小量阶的比较，极限的存在准则，极限四则运算法则，两个重要极限，函数的连续。

重点：极限的运算，无穷小量，两个重要极限，函数的连续

难点：极限的运算，等价无穷小量，两个重要极限

学时分配：6 学时

第一节　极限的概念

一、数列极限的概念

（一）数列

1．数列定义

一个定义在正整数集合上的函数 $y_n = f(n)$（称为整标函数），当自变量 n 按正整数 1，2，3，……依次增大的顺序取值时，函数值按相应的顺序排成一串数：$f(1), f(2),\cdots f(n)\cdots$ 称为一个无穷数列，简称数列。

2．数列的单调与有界

（二）数列的极限

1．数列极限的 ε—N 定义

设 $\{x_n\}$ 是一个数列，a 是一个确定的数，若对于 $\forall\varepsilon>0, \exists N\in \mathrm{N}$，使得 $n>N$ 时，

都有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立，则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，a 称为它的极限。

记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或者 $x_n \to a(n\to\infty)$。

2．注意：（1）ε 的任意性。ε 的作用在于衡量 x_n 和 a 的接近程度。

（2）N 的相应性。N 依赖于 ε，但并不是由 ε 唯一确定。

3．几何意义：所有下标大于 N 的 x_n 都落在 a 的 ε 邻域内，而在这个邻域之外，至多有 N（有限）个项。

（三）数列极限的性质定理

定理 1（唯一性）：若数列$\{x_n\}$收敛，则它的极限值是唯一的。

定理 2（有界性）：若数列$\{x_n\}$收敛，则它为有界数列。

定理 3 （子列收敛性）：数列收敛的充要条件是其任意子列都收敛并且具有相同的极限。

二、函数的极限

（一）当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限

1．定义

设 $f(x)$ 为定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数， A是一个定数，若$\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,使得当$|x|>M$,时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于正无穷时极限存在，并以A为极限。记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$。

2．几何意义

当$|x|>M$时，都有$|f(x)-A|<\varepsilon$，表示在直线$x=-M,x=M$的两侧，曲线$y=f(x)$整个地落在以$y=A$为中心，2ε 为宽度的带型区域内。

类似地可定义$\mathop{lim}\limits_{x\to+\infty}f(x)=A,\quad \mathop{lim}\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$。

3．定理: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

4．水平渐近线

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$或者$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，则称直线$y=A$为曲线$y=f(x)$的水平渐近线。

（二）当$x\to x_0$时，函数$y=f(x)$的极限

1．定义

如果$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立，则称当$x\to x_0$时，函数$y=f(x)$以常数$A$为极限。

记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或者$f(x)\to A\,(x\to x_0)$

2．说明：

（1）ε 刻画$f(x)$与常数A的接近程度，δ 刻画x与x_0的接近程度。

（2）$0<|x-x_0|<\delta$，不考虑$f(x)$在x_0处是否有定义。

3．几何意义

对于任意给定的正数 ε,不论 ε 多么小,即不论$y=A-\varepsilon$与$y=A+\varepsilon$间的带形区域多么狭窄,总可以找到δ>0,当点$(x,f(x))$的横坐标x进入$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$时,纵坐标$f(x)$全部落入区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$之内.此时$y=f(x)$的图形处于带形区域之内, ε 越小,带形区域越窄。

（三）左右极限（单侧极限）

1．左右极限定义

当$0<x-x_0<\delta$，表示x大于x_0而趋于x_0时，即x从x_0的右侧趋近于x_0，用$x\to x_0^{+}$表示，此时称常数A为函数$f(x)$的右极限。记作$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$。

当$0<x_0-x<\delta$，表示x小于x_0而趋于x_0时，即x从x_0的左侧趋近于x_0，用$x\to x_0^{-}$表示，此时称常数A为函数$f(x)$的左极限。记作$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$。

2．定理

函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充要条件是：左极限和右极限都存在且相等。即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

（四）函数极限的局部性质

1.唯一性定理：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则它只有一个极限。

2.有界性定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某个空心邻域，使得 $f(x)$ 在该空心邻域内有界。

3.保号性定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，，则存在 x_0 的空心邻域 $U^o(x_0)$，使得 $\forall x\in U^o(x_0)$ 恒有 $f(x)>0$ 。

4.不等式性质

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 皆存在，且存在 x_0 的某空心邻域 $U^o(x_0)$，使得 $\forall x\in U^o(x_0)$，有 $f(x)\le g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 。

第二节　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

（一）无穷小量的定义

1．定义：若在自变量 x 的某个变化过程中有 $\lim y=0$，则称变量 y 为 x 在该变化过程中的无穷小量。

2．注意：（1）谈到无穷小量时必须指明自变量的变化过程。

（2）无穷小量指的是变量，零是唯一可以作为无穷小量的常数。

（二）无穷小量与极限的关系

定理:变量 y 以 A 为极限的必要充分条件是:变量 y 可以表示为 A 与一个无穷小量的和.即 $\lim y=A$ 的充要条件是 $y=A+\alpha(x)$，$\alpha(x)$ 是在该自变量变化过程中的无穷小量。

（三）无穷小量的性质：

1.有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量；

2．有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量；

3．无穷小量与无穷小量的乘积是无穷小量；

4.常量与无穷小量乘积是无穷小量；

（四）无穷小量阶的比较

无穷小量是以零为极限的变量，但收敛于零的速度有快有慢。考察两个无穷小量的比可对他们的收敛速度快慢作出判断。

设 α,β 是同一过程中的两个无穷小量.

1.若 $lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 为比 β 高阶无穷小量，或称 β 为比 α 低阶无穷小量,记作：$\alpha=o(\beta)$

2.若 $lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c\ne 0$，则称 α 与 β 为同阶无穷小量。记作：$\alpha=O(\beta)$

3.若 $lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 为等价无穷小量。记作：$\alpha\sim\beta$

二、无穷大量

（一）无穷大量定义

如果对于任意给定的正数 E,变量 y 在其变化过程中,总有那么一个时刻,在那个时刻以后,不等式 $|y|>E$ 恒成立,则称变量 y 是无穷大量,或称变量 y 趋近于无穷大.记作 $lim\, y=\infty$ 。

说明：（1）无穷大量不是很大的数，而是具有非正常极限的函数。

（2）若 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量，则 $f(x)$ 为 $U(x_0)$ 上的无界函数。反之，无界函数不一定是无穷大量。

（二）铅直渐近线

如果 $f(x)$ 当 $x\to x^{+}{}_{0}$ 或 $x\to x^{-}{}_{0}$ 时为无穷大量，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线。

三、无穷小量与无穷大量的关系

定理：在变量 y 的变化过程中，

(1)如果 y 是无穷大量,则 $\dfrac{1}{y}$ 是无穷小量;(2)如果 y(≠0)是无穷小量,则 $\dfrac{1}{y}$ 是无穷大量;

第三节　极限的运算法则

一、极限的四则运算法则

(一)定理 1：在某一变化过程中，如果变量 x 和变量 y 分别以 A 与 B 为极限，则变量 $x\pm y$ 以 $A\pm B$ 为极限，即有 $lim\left(x\pm y\right)=lim\,x\pm lim\,y=A\pm B$ 。

推论：两个无穷小量的代数和仍为无穷小量。

(二)定理 2：在某一变化过程中，如果变量 x 和变量 y 分别以 A 与 B 为极限，则变量 xy 以 AB 为极限，即有 $lim\left(xy\right)=lim\,x\,lim\,y=AB$ 。

推论 1：两个无穷小量的乘积仍为无穷小量。

推论 2：常数因子可以提到极限符号外面，即 $lim\,cy=c\,lim\,y$ 。

推论 3：如果 n 是正整数，则有

（1）$lim\,x^n=\left(lim\,x\right)^n$；　（2）$lim\,x^{\frac{1}{n}}=\left(lim\,x\right)^{\frac{1}{n}}$

(三)定理 3：在某一变化过程中，如果变量 x 和变量 y 分别以 A 与 B 为极限，则变量 $\dfrac{x}{y}$ 以 $\dfrac{A}{B}$ 为极限，即有 $lim\dfrac{x}{y}=\dfrac{lim\,x}{lim\,y}=\dfrac{A}{B}$ 。

二、极限计算方法

（一）直接利用四则运算法则

（二）复合函数的极限法则

定理:设 $y=f\left(u\right),u=\varphi\left(x\right)$，则 y 是 x 的复合函数 $y=f\left[\varphi\left(x\right)\right]$，

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi\left(x\right)=a,\lim\limits_{u\to a}f\left(u\right)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f\left[\varphi\left(x\right)\right]=\lim\limits_{u\to a}f\left(u\right)=A$ 。

(三) 未定式的极限计算方法

若所给的极限为$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、∞-∞等无法直接利用四则运算法则计算的类型时，一般可利用约分法、有理化法、变量代换法、同除以最高次幂法、通分法等一些具体方法，然后再利用四则运算法则计算。

（四）利用等价无穷小量计算极限

1．等价无穷小的传递与代换性质

设$lim\,\alpha=0, lim\,\beta=0, lim\,\gamma=0$，则有

（1）若$\alpha\sim\beta, \beta\sim\gamma$，则$\alpha\sim\gamma$；

（2）若$\alpha\sim\beta$，则$lim\frac{\gamma}{\alpha}=lim\frac{\gamma}{\beta}$，$lim\frac{\alpha}{\gamma}=lim\frac{\beta}{\gamma}$。

2．常用的等价无穷小量

当$x\to 0$时，有以下结论：

$sin\,x\sim x,\ \ tan\,x\sim x,\ \ arcsin\,x\sim x,\ \ arctan\,x\sim x,\ \ e^x-1\sim x,\ \ 1-cos\,x\sim\frac{1}{2}x^2\ \ ln(1+x)\sim x,\ \ (1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{x}{n}$

第四节　两个重要极限

一、极限存在的两个准则

（一）两边夹准则(squeeze rule)

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，且存在 x_0 的某空心邻域 $U^o(x_0,\delta)$，使得$\forall x\in U^o(x_0,\delta)$，有$f(x)\le h(x)\le g(x)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}h(x)=A$。

（二）单调有界数列必有极限准则

单调递增有上界数列有极限；单调递减有下界数列有极限。

步骤：1.判断数列的单调性；

2.证明数列是有界的；

3.求极限。

二、两个重要极限

（一）第一重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x}=1$

注意：（1）0/0 型；（2）一般形式$\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

（二）第二重要极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

公式变形为：1.$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$；2.$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

注意：（1）1^∞型

（2）解题应使用凑指数幂，使得底数的第二项与指数互为倒数，同时注意变化趋势。

(3) 公式可推广为：$\lim\limits_{f(x)\to\infty}(1+\frac{1}{f(x)})^{f(x)}=e$；$\lim\limits_{f(x)\to 0}[1+f(x)]^{f(x)}=e$

三、连续复利

设银行的年利率为r，本金为A_0，则t 年后的本利和为$A_t=A_0(1+r)^t$；

若一年计n次利息，则到年终的本利和为$A=A_0(1+\frac{r}{n})^n$

若计息时间无限缩短，每时每刻都计算利息，即令$n\to\infty$，那么到年终的本利和为 $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_0(1+\frac{r}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}A_0\left[(1+\frac{r}{n})^{\frac{n}{r}}\right]^r=A_0e^r$，$t$ 年后的本利和为

$$A_t=\lim_{n\to\infty}A_0(1+\frac{r}{n})^{nt}=\lim_{n\to\infty}A_0\left[(1+\frac{r}{n})^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}=A_0e^{rt}$$

所以，若以连续复利计算利息，则复利公式是$A_t=A_0e^{rt}$。

第五节　函数的连续性

一、函数在某一点连续与间断

（一）两种定义形式

1.定义 1：设函数$y=f(x)$在点x_0的某一领域内有定义，若有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处连续。

说明：（1）$y=f(x)$在x_0处有定义；（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；（4）$y=f(x)$在$x_0$处连续和当$x\to x_0$时有极限是有区别的。

2.定义 2：设函数$y=f(x)$在点x_0的某一领域内有定义，若有

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续。

（二）左连续与右连续

1.左连续：若有$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，即在$x_0$左极限值等于函数值，就称$f(x)$点$x_0$左连续；

2.右连续：若有$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，即在$x_0$右极限值等于函数值，就称$f(x)$点$x_0$右连续。

函数$f(x)$在点x_0连续的充要条件是：函数$f(x)$在点x_0既是右连续又是左连续。

（三）连续函数的和、差、积、商的连续性

设函数$f(x),g(x)$在点x_0连续，则它们的和、差、积、商（$g(x_0)\neq 0$）都在点x_0处连续。

（四）复合函数的连续性

若函数$f(x)$在点x_0连续，$g(u)$在点u_0连续，且$u_0=f(x_0)$，则复合函数$g(f(x))$在点x_0连续。即:$\lim\limits_{x\to x_0}g[f(x)]=g[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)]=g[f(\lim\limits_{x\to x_0}x)]=g[f(x_0)]$

二、函数$f(x)$在区间上连续

(一)定义

1.函数$f(x)$在(a,b)上连续的定义

若$f(x)$在(a,b)内每一点都连续,则$f(x)$在(a,b)内连续, (a,b)为函数$f(x)$的连续区间。

2. 函数$f(x)$在$[a,b]$上连续的定义

若 $f\left(x\right)$ 在 (a,b) 内连续，且在 a 处右连续，在 b 处左连续，即

$\lim\limits_{x\to a^{+}} f\left(x\right)=f\left(a\right),\lim\limits_{x\to b^{-}} f\left(x\right)=f\left(b\right)$

则称 $f\left(x\right)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

(二)初等函数的连续性定理

一切基本初等函数都是其定义域上的连续函数。任何初等函数在其定义区间(包含在定义域内的区间)内都连续。

三、函数间断点及其分类

（一）间断点定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果 x_0 不是函数 $f(x)$ 的连续点，则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点。

（二）间断点的分类

1.可去间断点：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而 $f(x)$ 在 x_0 没有定义，或者有定义但 $f(x_0)\neq A$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点。

2.跳跃间断点：若 $f(x)$ 在点 x_0 存在左右极限，但 $\lim\limits_{x\to x_0^{+}} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^{-}} f(x)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点。

可去间断点和跳跃间断点统称第一类间断点，其特点是函数在该点处的左、右极限都存在。

3.第二类间断点:函数在该点处至少有一侧的极限不存在，称为第二类间断点。

四、闭区间上连续函数的性质

（一）最值定理

1.最值定义：函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在 $x_0\in I$ 使得 $\forall x\in I$，都有 $f(x)\le f(x_0)$（或 $f(x)\ge f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值（或最小值）。（最大最小值是在整个定义区间上的）

2.最值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，则它在 $\left[a,b\right]$ 上必存在最大值和最小值。

注意：“闭区间”，“函数 $f(x)$ 连续”这两个条件缺一不可。

3.推论（有界性定理）：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，则它在 $\left[a,b\right]$ 上有界。

（二）介值定理

1.介值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数 c，在开区间 $\left(a,b\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=c$。

注意：“闭区间”，“函数 $f(x)$ 连续”这两个条件缺一不可。

2.零点定理或根值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在开区间 $\left(a,b\right)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$。

3.推论：闭区间上的连续函数必能取得它的最大值与最小值之间的一切值。

第三章　导数与微分

本章教学基本要求：

1．理解导数的概念及可导性与连续性之间的关系，了解导数的几何意义；

2．掌握基本初等函数导数公式、导数的四则运算法则；

3. 掌握复合函数的链式求导法则；

4．掌握隐函数的求导法则导数与对数求导法；

5．理解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数；

6．理解微分的概念，导数与微分之间的关系，基本初等函数的微分公式，函数和、差、积、商微分法则，

7. 掌握利用导数求微分的方法和微分形式不变性；

8．了解微分的近似计算。

本章知识点、重点与难点：

知识点：导数的概念，导数的几何意义，函数的可导性与连续性之间的关系，基本初等函数的求导公式，导数的四则运算法则，复合函数求导法，隐函数求导法，对数求导法，高阶导数，微分，微分形式不变性。

重点：基本初等函数求导公式，复合函数求导法，隐函数求导法，对数求导法，高阶导数。

难点：导数与微分的概念，复合函数求导法。

学时分配：9 学时

第一节　导数的概念

一、引例

（一）变速直线运动的速度

设s表示一物体从某个时刻开始到时间t作直线运动所经过的路程，则s是t的函数$s=f(t)$。

当时间由t_0改变到$t_0+\Delta t$时，物体在Δt这一段时间内所经过的距离为

$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$，平均速度为$\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$。当$\Delta t$很小时，可用$\bar{v}$近似表示物体在时刻$t_0$的速度，$\Delta t$越小，近似程度就越好。当$\Delta t\to 0$时，若极限$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$存在，就称此极限为物体在时刻$t_0$的瞬时速度，即

$$v\big|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

（二）曲线切线的斜率问题

设有曲线 C 及 C 上一点 M，在点 M 外另取 C 上一点 N 做割线 MN。当 N 沿曲线 C 趋于点 M 时，如果割线 MN 的极限位置为 MT，则称直线 MT 为曲线 C 在点 M 处的切线。

设割线 MN 与 X 轴的夹角为φ切线 MT 与 X 轴的夹角为α。曲线方程为$y=f(x)$,点 M 的坐标为(x_0，y_0)，点 N 的坐标为$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$。于是，割线 MN 的斜率为$\tan\varphi=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

当点N沿曲线C趋向点M时，就有$\Delta x \to 0, \varphi \to \alpha$，割线的斜率$\tan\varphi$就会无限接近切线$\tan\alpha$的斜率,又由极限的定义，有

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k$$

即为切线的斜率。

二、导数概念

（一）函数在一点的导数定义

1.定义

设函数$f(x)$在点x_0的某个领域内有定义，当自变量在点x_0处取得改变量$\Delta x \neq 0$时，函数$f(x)$取得相应的改变量$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

若$\Delta x \to 0$时，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，即$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限值为函数$f(x)$在点$x_0$处的导数(或微商)，并称$y=f(x)$在点$x_0$处可导，记作：$f'(x_0)$或$y'\big|_{x=x_0}$或$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$或$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$。

2.导数的定义也可取如下两种形式

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3.利用导数定义求导数的步骤

（1）求增量：$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

（2）作比值：$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

（3）求$\Delta x \to 0$时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限,即$y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

（二）导数的几何意义

函数$y = f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$，就是曲线$f(x)$在点$M(x_0, y_0)$处的切线的斜率。

若α表示这个切线与x轴正向的夹角，则$f'(x) = \tan\alpha$。从而$f'(x) > 0$意味着切线与x轴正向的夹角为锐角；$f'(x) < 0$意味着切线与x轴正向的夹角为钝角；$f'(x) = 0$表明切线与x轴平行。

若函数在点x_0处可导，则曲线$y = f(x)$在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线方程为$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

（三）函数在一点的左右导数

1.定义：设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，若$\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称之为$f(x)$在点$x_0$处的左导数，记作$f'_-(x_0)$；若$\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称之为$f(x)$在点$x_0$处的右导数，记作$f'_+(x_0)$。

2.定理: 函数$y = f(x)$在点x_0处可导的充要条件是左右导数都存在且相等。

（四）导函数

1．导函数的定义

若函数$y=f(x)$在区间内的每一点都可导，则在该区间内每取一个自变量x的值，就可得到一个唯一对应的导数值，这就构成了一个新的函数，称为原函数$y=f(x)$的导函数，记做$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$。

导函数往往简称为导数。表示为$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$。

2．函数$f(x)$在区间(a,b)上可导

如果函数$y=f(x)$在在区间(a,b)内每一点x处均可导，则称函数$y=f(x)$
在区间(a,b)内可导。

三、可导与连续的关系

定理 ：若函数在点$x=x_0$处可导，则函数在点$x=x_0$处连续。

注意：

（1）定理的逆命题不成立；（2）定理的逆否命题一定成立，即若函数在点$x=x_0$处不连续，则函数在$x=x_0$处不可导；（3）可导函数的导数不一定连续。

第二节　导数的基本公式与运算法则

一、函数和、差、积、商求导法则

设u, v都是x的可导函数，则有：

（一）$(u\pm v)'=u'\pm v'$

（二）$(uv)'=u'v+uv'$　特别$(cv)'=cv'$　可推广到有限个

（三）$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$　特别$(\frac{c}{v})'=-\frac{cv'}{v^2}$

二、复合函数求导法则

设$u=\varphi(x)$在点x可导，$y=f(u)$在相应的点u可导，则复合函数$y=f(\varphi(x))$在点x可导，且$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$或$y'_x=f'(u)\varphi'(x)$。

三、隐函数求导法则

只要把y看作x的函数，利用复合函数求导法，将方程$F(x,y)=0$的两边分别对x求导数，然后解出y'_x，即得隐函数的导数。

四、取对数求导法

当所给的两个函数是几个式子的连乘与连除形式时，对等号两端同时取自然对数，然后利用隐函数求导法则即可求得。

五、分段函数求导

对于分段函数，其各区间段内导数的求法与一般所讲的导数的求法无异，要特别注意的是分界点$x=x_0$处的导数一定要用(左、右)导数的定义求，即

$$f'_{+}(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad 或 \quad f'_{+}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

六、基本初等函数的求导公式

（一）常量函数求导：$(C)'=0$

（二）幂函数求导：$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha\in R)$

（三）指数函数求导：$(a^x)'=a^x\ln a \quad (a>0,a\neq 1)$,特别$(e^x)'=e^x$

（四）对数函数求导：$(\log_a^x)'=\dfrac{1}{x\ln a} \quad (a>0,a\neq 1)$,特别$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

（五）三角函数求导：

$(\sin x)'=\cos x$； $(\tan x)'=\sec^2 x$； $(\sec x)'=\sec x\tan x$；

$(\cos x)'=-\sin x$；$(\cot x)'=-\csc^2 x$；$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

（六）反三角函数求导：

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$；$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$； $(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

第三节 高阶导数

一、高阶导数的定义

一般地，若函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$在点x处可导，则称$f'(x)$在点x处的导数为函数$y=f(x)$在点x处的二阶导数。记作：$f''(x)$，y''，或$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

类似地，二阶导数的导数就称作函数$y=f(x)$的三阶导数，记作：

$f'''(x)$，y'''，或$\dfrac{d^3y}{dx^3}$

一般地，定义$y=f(x)$的n阶导数为$y=f(x)$的$n-1$阶导数的导数，即

$f^{(n)}(x),y^{(n)}$，或$\dfrac{d^ny}{dx^n}$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数。函数$y=f(x)$的各阶导数在点$x=x_0$处的数值记为：$f'(x_0)$，$f''(x_0)$，…，$f^{(n)}(x_0)$或$y'\big|_{x=x_0}$，$y''\big|_{x=x_0}$，…，$y^{(n)}\big|_{x=x_0}$

二、高阶导数的求法

一般地，求高阶导数就是多次接连地求导数。当求n阶导数时，一般情况下都有规律可循，可相应地依次求低阶导数，发现规律，得出n阶导数。

第四节 微分

一、微分的定义

（一）引例：热胀冷缩原理的数学分析

一般地，若函数$y=f(x)$满足一定条件，则函数的增量Δy可表示为

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$，

且A是不依赖于Δx的常数，因此$A\Delta x$是Δx的线性函数，且$\Delta y - A\Delta x = o(\Delta x)$

所以，当$A \neq 0$，且$|\Delta x|$很小时，我们可近似地用$A\Delta x$来代替Δy。

（二）定义

设函数$y=f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0+\Delta x$在此区间内，若函数的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可表示为$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$。其中$A$是不依赖于$\Delta x$的常数，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$是可微的，而$A\Delta x$叫做函数$y=f(x)$在点$x_0$相应于自变量增量$\Delta x$的微分，记作$dy$，即$dy = A\Delta x$。

（三）微分与可导的关系

若函数$y=f(x)$在点x处可微，则它在点x处一定可导，且

$dy = A\Delta x = f'(x)\Delta x$；反之，若$y=f(x)$在点$x$处可导，则它在点$x$处也可微。

自变量的微分就是它的改变量Δx，即$dx = \Delta x$。则$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$，故导数又称为微商。

（四）微分的几何意义

曲线在一点的切线上的纵坐标的改变量。当Δx很小时，可以用切线段来近似代替曲线段。

二、微分法则

（一）基本初等函数的微分公式

1.常量函数微分：$dC = 0$ （C 为常数 ）

2.幂函数微分：$d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx \quad (\alpha \in R)$

3.指数函数微分：$d(a^x) = a^x \ln a dx \quad (a>0, a\neq 1)$ 特别$d(e^x) = e^x dx$

4.对数函数微分：$(\log_a^x)' = \dfrac{1}{x\ln a} \quad (a>0, a\neq 1)$ 特别$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

5.三角函数微分：

$d(\sin x) = \cos x dx$；$d(\tan x) = \sec^2 x dx$；$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$； $d(\cos x) = -\sin x dx$；$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$；$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$

6.反三角函数微分：

$d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$；$d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$；

$d(\arctan x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$ ； $d(\mathrm{arc}\cot x) = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

（二）函数和、差、积、商微分运算法则

设u,v都是x的可微函数，则有：

1.$d(u \pm v) = du \pm dv$

2.$d(uv) = vdu + udv$，特别$d(cv) = cdv$ 可推广到有限个

3.$d(\dfrac{u}{v}) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$，特别$d(\dfrac{c}{v}) = -\dfrac{cdv}{v^2}$

（三）复合函数微分法则

1.复合函数微分法则

设$u=\varphi(x)$在点x可导，$y=f(u)$在相应的点u可导，则复合函数$y=f(\varphi(x))$在点x的微分为

$dy = y'_x dx = f'(u)\varphi'(x)dx$ 。

2.微分形式不变性

在复合函数的微分法则中，由于 $du = \varphi'(x)dx$ ，所以复合函数 $y = f(\phi(x))$ 的微分公式也可写成 $dy = f'(u)du$，或 $dy = y'_u du$ 。

由此可见，无论 u 是自变量还是中间变量，微分形式 $dy = f'(u)du$ 保持不变。这一性质称为微分形式不变性。

三、微分的近似计算

在实际应用问题中，常会遇到一些复杂的计算公式，如果直接用这些公式进行计算，往往费时费力，而利用微分则可把一些复杂性的计算公式 用简单的近似公式来代替。

由微分定义 $\vartriangle y = f'(x_0)\vartriangle x + \circ(\vartriangle x)$，当 $\left|\vartriangle x\right|$ 很小时，$\vartriangle y \approx f'(x_o)\vartriangle x = dy$，

$\left|\vartriangle x\right|$ 越小，近似程度越好。上式还可表示为 $f(x_0 + \vartriangle x) \approx f(x_0 + f'(x_0)\vartriangle x$ 。

令 $x_0 + \vartriangle x = x$，则有 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\vartriangle x$ 。

特别地当 $x_0 = 0$ 时，有 $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ 。当 x 很小时， 可以推得下列各式：

（1）$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{n}$ （2）$e^x \approx 1 + x$ （3）$\ln(1+x) \approx x$

（4）$\sin x \approx x$ （x 为弧度) （5）$\tan x \approx x$ （x 为弧度)

第四章　导数的应用

本章教学基本要求：

1．理解罗尔(Rolle)定理和拉格朗日(Lagrange)中值定理，了解柯西(Cauchy)中值定理,掌握这三个定理的简单应用；

2．会利用洛必达法则求极限；

3．掌握函数单调性的判别方法及简单应用；

4. 掌握函数极值、最大值和最小值的求法（含简单的应用题）；

5．会用导数判断函数图形的凹向，会求函数图形的拐点和渐近线；

6．掌握函数作图的基本步骤和方法,会做简单函数的图形；

7．了解导数的经济意义（边际和弹性的概念）。

本章的知识点 重点和难点

知识点：微分中值定理　洛必达(L'Hospitai)法则求极限　函数的单调性　函数的极值　函数图形的凹向性、拐点、渐近线　函数图形的描绘　函数的最大值与最小值

重点：洛必达(L'Hospitai)法则求极限　函数图形的描绘　函数的最大值与最小值

难点：洛必达(L'Hospitai)法则求极限

学时分配：9 学时

第一节　中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

（一）定理 1 （Rolle 定理）

若函数 $f(x)$ 满足如下条件：（1）区间 $[a,b]$ 上连续；（2） $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导；（3） $f(a)=f(b)$ 。则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$ 。

（二）几何意义

在每点都有切线的一段曲线上，若两端点高度相同，则在此曲线上至少存在一条水平切线。

罗尔定理肯定了点 ξ 的存在性及其取值范围，却不能肯定点 ξ 的确切个数及准确位置。

注意：定理中三个条件缺一不可。但也不能认为定理条件不全具备，就一定不存在属于 (a,b) 的 ξ，使得 $f'(\xi)=0$ 。

二、拉格朗日(Lagrange)中值定理

（一）定理 2（Lagrange 中值定理）

若函数 $f(x)$ 满足如下条件：（1）区间 $[a,b]$ 上连续；（2） $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导；

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)=f(a)}{b-a}$ 。

（二）几何意义

如果曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 是连续的，除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线，则在曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上至少有一点 C，在该点处曲线的切线平行于弦 AB。

（三）几种变形，可根据不同场合灵活采用

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), a<\xi<b$

$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a), 0<\theta<1$

$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h, 0<\theta<1, b=a+h$

（四）推论

推论 1．若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 为 I 上的一个常量函数。

推论 2: 若函数 $f(x)$) 和 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，并且 $f'(x)\equiv g'(x)$，则在 (a,b) 内 $f(x)=g(x)+C$ （C 为常数）

三、柯西(Cauchy)中值定理

定理 3 （Cauchy 中值定理）

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足如下条件：（1） $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；（2） $f(x)$ 和 $g(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导；（3） $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 在 (a,b) 内不同时为零；（4） $g(a)\neq g(b)$。

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

第二节　洛必达法则

两个无穷小量之比的极限或两个无穷大量之比的极限，有的存在，有的不存在，称这类极限为“未定式”，记为 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$。

一、$\dfrac{0}{0}$ 型不定式极限

定理：若函数 $f(x)$)和 $g(x)$ 在点 x_0 的某一邻域（点 x_0 可以除外）内有定义，且满足条件：

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

（2） $f(x)$)和 $g(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(A\in R,或\pm\infty,\infty)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限

定理: 若函数 $f(x)$)和 $g(x)$ 在点 x_0 的某一邻域（点 x_0 可以除外）内有定义，且满足条件：

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$

（2） $f(x)$)和 $g(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(A\in R,或\pm\infty,\infty)$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$

注：（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型可继续对此极限式应用洛必达法则，由此

类推可多次连续使用此法则。

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\ldots\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=\ldots\ldots$$

（2）求导过程中要注意化简，也可使用其它求极限的方法，如等价无穷小代换等。

(3)当 $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时（不是 ∞），洛必达法则失效，$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 仍可能存在。

三、其他未定式的极限

洛必达法则解决 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限问题，针对 $0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、1^∞、0^0、∞^0 等型的未定式的极限问题，可经过适当的转换，将它们化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式，然后利用洛必达法则求极限。

（一）$0\cdot\infty\Rightarrow\frac{1}{\infty}\cdot\infty$ 或 $0\cdot\infty\Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}$

（二）$\infty-\infty\Rightarrow\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\Rightarrow\frac{0-0}{0\cdot 0}$

（三）$\left.\begin{array}{l}0^0\\1^\infty\\\infty^0\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{取对数}}\left\{\begin{array}{l}0\cdot\ln 0\\\infty\cdot\ln 1\\0\cdot\ln\infty\end{array}\right.\Rightarrow 0\cdot\infty$

第三节　函数单调性与极值问题

一、函数单调性判断

定理：设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，那么

（1）　如果 $x\in(a,b)$ 时恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加；

（2）　如果 $x\in(a,b)$ 时恒有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少；

注意：如果在区间 (a,b) 内 $f'(x)\ge 0$（或 $f'(x)\le 0$），但等号只在个别点处成立，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内仍是单调增加（或单调减少）的。

二、函数极值

（一）函数极值定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果对该邻域内一切异于 x_0 的 x，恒有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的极大值点；如果对该邻域内一切异于 x_0 的 x，恒有 $f(x)\succ f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的极小值点。极值是曲线增减的局部转折点。

（二）函数极值存在的必要条件

定理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数，且 x_0 是极值点，则必有 $f'(x_0)=0$。

说明：此命题的逆命题不一定成立,极值点还有可能是导数不存在的点。所以，函数的极值点必是函数的驻点或导数不存在的点，反之不成立。

（三）判定极值的充分条件

1.第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域（$x_0-\delta, x_0+\delta$）内连续且可导（在点 x_0 处导数可以不存在）

（1）如果当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x_0)>0$，而当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x_0)<0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取极大值 $f(x_0)$；

（2）如果当 $x\in(x_0-\delta, x_0)$ 时，$f'(x_0)<0$，而当 $x\in(x_0, x_0+\delta)$ 时，$f'(x_0)>0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值 $f(x_0)$；

（3）如果当 $x\in U^o{}_\delta(x_0)$ 时，$f'(x_0)$ 不变号，则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值。

2.第二充分条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么

（1）若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 是函数的极小值点；

（2）若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 是函数的极大值点。

三、函数最值

若函数在闭区间上连续，则该函数在此区间上一定存在最大值和最小值。闭区间上求最值的方法：

1．求出函数在闭区间上所有驻点和不可导点，设其为有限个，得到可能极值点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；

2．计算出函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ 以及 $f(a)$，$f(b)$；

3．比较 2 中所有函数值的大小，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值。

注意：（1）闭区间上单调函数最值为其端点处函数值；

（2）如果函数在开区间上有且仅有一个极大值，而没有极小值，则此极大值为函数的最大值，极小值亦然；

在某些实际问题中，往往可以根据问题的实际意义确定可导函数 $f(x)$ 的最值一定在定义区间内部取得。这时，如果 $f(x)$ 在定义区间内只有唯一的驻点，则不必讨论该驻点是否为极值点，可直接断定该驻点处是函数的最值。

第四节　曲线的凹向与拐点

一、曲线凹向的定义

若曲线 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内曲线段总位于其上任一点处切线的上方，则称曲线在 (a,b) 内是凹的（上凹 $\bigcup$）；若曲线总位于其上任一点处切线的下方，则称曲线在 (a,b) 内是凸的（下凹 $\bigcap$）

二、曲线凹向的判定定理

定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，则有

（1）若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的图形是凹的（$\bigcup$）

（2）若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的图形是凸的（$\bigcap$）

三、拐点及其求法

（一）拐点定义：凹弧与凸弧的分界点（x_0，$f(x_0)$ 称为拐点。

注意：拐点是 $f''(x)$=0 的点或 $f''(x)$ 不存在的点，反之不成立。

（二）求曲线凹向与拐点的步骤：

1.求定义域

2.求 $f''(x)$（写成乘积形式）。

3.求 $f''(x)=0$ 的点和 $f''(x)$ 不存在的点。

4.用上述点将定义域分成若干小区间，考查每个小区间上 $f''(x)$ 的符号，并判断凹凸性。

5.若 $f''(x)$ 在点 x_0 两侧异号，则（x_0，$f(x_0)$ 是拐点，否则不是。

第五节　函数图形的作法

一、渐近线

定义：若曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时，点 P 与某一固定直线 L 的距离趋于零，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线。

（一）水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 成立，则称直线 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线。

（二）垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 成立，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 垂直渐近线

（三）斜渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ 成立，则称 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 斜渐近线。

其中：$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x};b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$

二、曲线做图的一般作法

步骤：

1．求函数的定义域,值域,考察奇偶性，周期性

2．确定函数的单调区间，极值点,凹凸区间及拐点

3．考察曲线的渐近线

4．画出坐标轴，标出特殊点（极值点、拐点、及与坐标轴的交点等），画出渐近线

5．据讨论结果逐段描绘函数图象。

第五节　变化率及相对变化率在经济中的应用

一、函数绝对变化—边际函数

（一）边际函数的概念

1.边际函数定义

设函数 $y=f(x)$ 可导，导函数 $f'(x)$ 也称为边际函数。

称 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 为 $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 内的平均变化率（平均变化速度）。

称 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 为 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的边际函数值（变化速度）。

2.边际的含义

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处，当 x 产生一个单位的改变时，y 近似改变 $f'(x_0)$ 个单位。

$\Delta y|_{\substack{x=x_0 \\ \Delta x=1}} \approx dy|_{\substack{x=x_0 \\ dx=1}} = f'(x_0)dx|_{\substack{x=x_0 \\ dx=1}} = f'(x_0)$

（二）经济中常见的边际函数

1.边际成本函数：

总成本的变化率 $C'(Q)$，称为边际成本。

边际成本 $C'(Q)$ 应表示当已生产了 Q 个单位产品时，再增加一个单位产品时总成本增加的数量。

2.边际收益函数：

总收益的变化率 $R'(Q)$，称为边际收益。它表示销售 Q 个单位产品后，再销售一个单位的产品所增加的收益。

3.边际利润函数：

令 $L(Q) = R(Q) - C(Q)$，则称 $L(Q)$ 为利润函数，利润函数的变化率 $L'(Q)$，称为边际利润 $L'(Q) = R'(Q) - C'(Q)$

它表示若已经生产了 Q 个单位的产品，再多生产一个单位的产品总利润的增加量。

（三）利润极大化原则

$L(Q)$ 取得最大值的必要条件：$L'(Q) = 0$；$L(Q)$ 取得最大值的充分条件：$L''(Q) < 0$。

二、函数的相对变化率——函数的弹性（弹性分析）

（一）弹性函数的概念

设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导，函数的相对改变量 $\dfrac{\Delta y}{y_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}$，与自变量的相对改变量 $\dfrac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\dfrac{\Delta y / y_0}{\Delta x / x_0}$，称为函数 $f(x)$ 从 $x = x_0$ 到 $x = x_0 + \Delta x$ 两点间的相对变化率，或称两点间的弹性。当 $\Delta x \to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y / y_0}{\Delta x / x_0}$ 的极限称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的相对变化率，也就是相对导数，或称弹性。

$$\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)}$$

$\dfrac{E}{Ex} f(x_0)$ 表示在点 x_0 处，当 x 改变 1%时，$f(x)$ 近似地改变 $\dfrac{E}{Ex} f(x_0)$ %。

（二）需求函数与供给函数

1.需求函数:

设 P 表示商品价格，Q 表示需求量，那么 $Q = f(P)$ 为需求函数。

一般地,需求量随价格上涨而减少。因此，通常需求函数是价格的单调减少函数。

需求量 Q 对价格 P 的导数，$f'(P)$ 称为边际需求函数。它表示价格上涨一个单位，需求量将减少 $f'(P)$ 个单位。

2.供给函数:

设 P 表示商品价格，S 表示供给量，那么 $S = \varphi(P)$ 为供给函数。一般地，商品供给量随商品价格上涨而增加，因此商品供给函数 S 是商品价格 P 的单调增加函数。

3.供需平衡点

需求函数Q是单调减少函数，供给函数 S 是单调增加函数，把需求曲线和供给曲线（供给函数的图形）画在同一坐标系中，他们将相交于点处$(\overline{P},\overline{Q})$，$\overline{P}$是供需平衡的价格，叫均衡价格；$\overline{Q}$是均衡数量。

（三）需求弹性与供给弹性

1.需求价格弹性

某商品需求函数$Q=f(P)$在$P=P_0$处可导，$-\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P_0}{Q_0}$成为该商品在$P=P_0$与$P=P_0+\Delta P$两点间的需求弹性。记作：$\overline{\eta}(P_0,P_0+\Delta P)=-\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P_0}{Q_0}$

称$\lim\limits_{\Delta P\to 0}(-\frac{\Delta Q/Q_0}{\Delta P/P_0})=-f'(P_0)\frac{P_0}{f(P_0)}$为该商品在$P=P_0$处的需求弹性。记作：

$\eta|_{P=P_0}=\eta(P_0)=-f'(P_0)\frac{P_0}{f(P_0)}$

2.供给价格弹性

设某商品的供给函数$Q=\varphi(P)$在点P_0处可导，称$\overline{\varepsilon}(P_0,P_0+\Delta P)=\frac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\frac{P_0}{Q_0}$为该商品在$P_0$和$P_0+\Delta P$两点间的供给弹性；称$\varepsilon|_{P=P_0}=\varepsilon(P_0)=\varphi'(P_0)\frac{P_0}{\varphi(P_0)}$为在$P_0$处的供给弹性。

第五章　不定积分

本章的教学基本要求：

1．理解原函数与不定积分的概念，掌握不定积分的基本性质；

2．掌握基本积分公式；

3．掌握不定积分的换元积分法；

4. 掌握不定积分的分部积分法；

本章的知识点 重点和难点：

知识点：原函数和不定积分的概念，不定积分的基本性质，基本积分公式，不定积分的换元法和分部积分法

重点:不定积分的概念，基本性质和基本积分公式，不定积分的换元法和分部积分法

难点: 不定积分的换元法和分部积分法

学时分配：6 学时

第一节　不定积分的概念与性质

一、原函数

（一）定义：设 $f(x)$ 是定义在某区间上的已知函数，如果存在一个函数 $F(x)$，对于该区间上每一点满足：$F'(x)=f(x)$ 或者 $dF(x)=f(x)dx$。就称 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 的原函数。

（二）原函数存在定理：

1.若函数 $f(x)$ 在区间上连续，则 $f(x)$ 在该区间上存在原函数 $F(x)$。

2.设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在某区间上的一个原函数，则

（1） $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数，其中 C 是任意常数；

（2） $f(x)$ 的任意两个原函数之间只可能相差一个常数。

二、不定积分的定义

设函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间上的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有的原函数称为 $f(x)$ 的不定积分。记作：$\int f(x)dx$。即 $\int f(x)dx=F(x)+C$

其中 $\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)dx$ 为被积表达式，x 为积分变量。

三、不定积分的几何意义

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则称 $y=F(x)$ 的图像为 $f(x)$ 的一条积分曲线。则函数 $f(x)$ 的不定积分就表示 $f(x)$ 的某一条积分曲线沿纵轴方向任意平移所得一切积分曲线组成的曲线族。显然，若在每一条积分曲线上横坐标相同的点处作切线，则这些切线是平行的。任意两条积分曲线的纵坐标之间相差一个常数。

四、不定积分的性质

（一）不定积分与微分（或导数）互逆

1． $[\int f(x)dx]'=f(x)$　或者　$d\int f(x)dx=f(x)dx$

2. $\int F'(x)dx = F(x)+C$ 或者 $\int dF(x) = F(x)+C$

（二）和差函数的不定积分等于不定积分的和差。即

$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

（三）$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx(k \neq 0$，为常数)

五、基本积分公式

由基本初等函数求导公式可以相应地得到如下基本积分公式：

（一）$\int dx = x + c$

（二）$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+!} + c(\alpha \neq -1)$

（三）$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

（四）$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c(a>0, a \neq 1)$

（五）$\int e^x dx = e^x + c$

（六）$\int \sin x dx = -\cos x + c$

（七）$\int \cos x dx = \sin x + c$

（八）$\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \sec^2 dx = \tan x + c$

（九）$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$

（十）$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

（十一）$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

（十二）$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$

（十三）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$

说明：基本积分公式是以 x 为积分变量的，将基本公式中所有 x 换成其它字母亦成立。

第二节　换元法

一、第一类换元法

（一）定理：设 $f(u)$ 的原函数为 $F(u)$，$u=\phi(x)$ 可导，则 $F(\phi(x))$ 是 $f[\phi(x)]\phi'(x)$ 的原函数，即 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \underline{\underline{u=\varphi(x)}} \int f(u)du = F(u)+c = F[\varphi(x)]+c$。

这种将 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 利用中间变量 u 化为 $\int f(u)du$ 。则可直接（或稍微变形就可）应用基本积分公式求得结果，再将 u 还原成 $\varphi(x)$ 的积分法，称为第一类换元积分法，也叫凑微分法。

说明：使用第一换元积分法的关键是设法把被积表达式 $f(x)dx$ 凑成 $f[\phi(x)]\phi'(x)dx$ 的形式，

以便选取变换 $u=\phi(x)$，化为易于积分的 $\int f(u)du$，最终再把新引入的变元 u 还原成起初的变元 x。

（二）第一换元积分法的基本步骤：

1.先把被积函数 $f(x)$“凑”成 $g[\phi(x)]\phi'(x)$ 的形式；

2.令 $u=\phi(x)$，则 $du=\phi'(x)dx$，于是有 $\int f(x)dx=\int g[\phi(x)]\phi'(x)dx=\int g(u)du=F[\phi(x)]+C$

3.利用积分表达式求出 $\int g(u)du=F(u)+C$

4.将 $u=\phi(x)$ 带回原变量 x，即 $\int f(x)dx=\int g(u)du=F[\phi(x)]+C$

二、第二换元积分法

（一）定理：设函数 $x=\phi(t)$ 连续，$\phi'(t)$ 存在且连续，其反函数 $t=\phi^{-1}(x)$ 存在且可导，若 $\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt=F(t)+C$，则 $\int f(x)dx=\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt=F(t)+C=F[\phi^{-1}(x)]+C$。

（二）三角换元法

利用三角函数换元，变根式积分为三角有理式积分

被积函数 $f(x)$ 含根式	所作代换
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$

第三节　分部积分法

分部积分法则

定理：若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导，且不定积分 $\int u'(x)v(x)dx$ 存在，则 $\int u(x)v'(x)dx$ 也存在，并有 $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$

或：　$\int udv=uv-\int vdu$

此定理的关键问题在于如何把被积函数分成两部分，如何选取 u 与 dv。

选取原则：1.积分容易者 dv，或是由 $v'(x)$ 容易求 $v(x)$；

2.求导简单者选为 u。在两者不可兼得的情况下，首先保证前者。

3.不定积分 $\int vdu$ 要比原不定积分 $\int udv$ 容易求。

第六章　定积分

本章的教学基本要求:

1．了解定积分的概念和几何性质；了解定积分的基本性质；

2．理解变上限定积分定义的函数并会求它的导数；

3．熟练运用牛顿一莱布尼兹公式计算定积分；

4．熟练掌握定积分的换元法和分部积分法；

5．会利用定积分求平面图形的面积；会利用定积分求解简单的经济应用问题；

6．了解广义积分的概念，会计算广义积分。

本章的知识点、重点和难点

知识点：定积分的概念和基本性质，变上限定积分定义的函数及其导数，牛顿-莱布尼兹公式，定积分的换元法与分部积分法，定积分的应用，广义积分。

重点：定积分的计算，平面图形的面积的计算。

难点：定积分与不定积分的关系。

学时分配：6 课时

第一节　定积分的概念

一、曲边梯形的面积

（一）曲边梯形

在直角坐标系中，由连续曲线$y=f(x)$与三条直线：$x=a, x=b, y=0$所围成的图形称为曲边梯形。其中，在x轴上的线段称为曲边梯形的底边，曲线段称为曲边梯形的曲边。

任意曲线围成的平面图形的面积，在适当选择坐标系后，往往可以化为两个曲边梯形面积的差。

（二）曲边梯形的面积计算方法

1.分割：任取分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$把曲边梯形的底$[a,b]$分成$n$个小区间：$[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，…，$[x_{i-1},x_i]$，…，$[x_{n-1},x_n]$。小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度记为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$。

过各分点作垂直于x轴的直线，把整个曲边梯形分成n个小曲边梯形，其中第i个小曲边梯形的面积为$\Delta A_i\,(i=1,2,\cdots,n)$。

2.求和：在第i个小曲边梯形的底$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i\ (x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$它所对应的函数值时$f(\xi_i)$，用相应的宽为$\Delta x_i$，长为$f(\xi_i)$的小矩形面积来近似代替这个小曲边梯形的面积，即：$\Delta A_i=f(\xi_i)\Delta x_i\ (i=1,2,\cdots n)$。把$n$个小矩形面积相加得和式它就是曲边梯形面积$A$的近似值，即$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

3.求极限：分割越细，$f(\xi_i)\Delta x_i$就越接近于曲边梯形的面积A，当最大的小区间长度趋近于零，即$\lambda\to 0(\lambda=\max_i\{\Delta x_i\})$时，和式$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$的极限就是$A$，故有

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

可见，曲边梯形的面积是一个和式的极限。

二、定积分的定义

（一）定义：如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，用点$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，将区间$[a,b]$分成$n$个小区间$[x_{i-1},x_i]\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，其长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，在每个小区间上任取一点$\xi_i\left(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i\right)$，则乘积$f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\ \left(i=1,2,\cdots n\right)$称为积分元素。总和$S=\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$称为积分和。如果当$n$无限增大，而$\Delta x_i$中最大者$\Delta x\to 0\left(\Delta x=\max_i\{\Delta x_i\}\right)$时，总和$S$的极限存在，且此极限与$[a,b]$的分法以及$\xi_i$的取法无关。则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上是可积的，并将此极限值称为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记为$\int_a^b f\left(x\right)dx$。即$\int_a^b f\left(x\right)dx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$。

其中$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式，x称为积分变量，$[a,b]$称为积分区间，a称为积分下限，b称为积分上限。

注意：

定积分表示一个数，它只取决于被积函数与积分上，下限，而与积分变量用什么字母无关。例如：$\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b f\left(t\right)dt$

（二）规定

1.在定积分中，如果$a>b$，规定$\int_b^a f\left(x\right)dx=-\int_a^b f\left(x\right)dx$

2.在定积分中，如果$a=b$，规定$\int_a^a f\left(x\right)dx=0$

三、定积分的几何意义

（一）当$f\left(x\right)\ge 0$时，$\int_a^a f\left(x\right)dx=A$；

（二）当$f\left(x\right)<0$时，$\int_a^a f\left(x\right)dx=-A$。

四、定积分的性质

设函数$f(x),g(x)$均为$[a,b]$上的可积函数，则有下列性质：

（一）常数因子可以提到积分号前,即$\int_a^a kf\left(x\right)dx=k\int_a^b f\left(x\right)dx$　（k是常数）

（二）代数和的积分等于积分的代数和,即$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$。

（三）定积分的可加性

如果积分区间$[a,b]$被点c分成两个小区间$[a,c]$，$[c,b]$则

$$\int_a^a f\left(x\right)dx=\int_a^c f\left(x\right)dx+\int_c^b f\left(x\right)dx$$

（四）如果被积函数$f\left(x\right)=1$,则有$\int_a^b dx=b-a$

（五）如果函数$f\left(x\right),g\left(x\right)$在区间$\left(a,b\right)$上满足$f\left(x\right)\le g\left(x\right)$,则有

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\le\int_a^b g\left(x\right)dx$$

（六）如果函数$f\left(x\right)$在区间(a,b)上的最大值与最小值分别为M,m,则

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

（七）积分中值定理:

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在区间 $[a,b]$ 上，至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad a \le \xi \le b$

由定积分的几何意义去理解定积分中值定理更直观，以连续曲线 $f(x)$（$a \le x \le b, f(x) \ge 0$）为曲边的曲边梯形面积，等于以 $f(\xi)$ 为高，$b-a$ 为底的矩形的面积。

第三节　定积分与不定积分的关系

一、变上限函数

（一）变上限函数的定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x \in [a,b]$ 则 $\int_a^x f(x)dx$ 存在。在 $\int_a^x f(x)dx$ 式子中的 x 即是积分变量，又是积分上限，为避免混淆，把积分变量改为 t ,则积分写为 $\int_a^x f(x)dx$。

由于积分下限为定数 a，上限 x 在区间 $[a,b]$ 上变化，故 $\int_a^x f(x)dx$ 的值随 x 的变化而变化，也就是说 $\int_a^x f(x)dx$ 是变量 x 的函数，称 $\int_a^x f(x)dx$ 为变上限积分。

记作 $F(x) = \int_a^x f(x)dx, x \in [a,b]$

（二）原函数存在定理

1.变上限积分的可导性

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ 在 $[a,b]$ 上可导，且其导数就是 $f(x)$，即 $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

本定理把导数和定积分这两个表面上看似不相干的概念联系了起来，它表明：在某区间上连续的函数 $f(x)$，其变上限积分 $\int_a^x f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。

2.原函数存在定理

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在该区间上 $f(x)$ 的原函数存在。

二、微积分基本定理(牛顿—莱布尼兹公式)

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上边续，且 $F(x)$ 是它在该区间上的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

此公式称为牛顿—莱布尼兹公式。

公式表明：

1．定积分的计算不必用和式的极限，而是利用不定积分来计算。

2．只要我们求出 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，在区间两端点处的函数值差 $F(b)-F(a)$，就是 $\int_a^x f(x)dx$ 的值。

第四节　定积分的计算

一、换元法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，变换 $x=\varphi(t)$ 满足：1. $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$;2. 在区间 $[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$) 上，$\varphi(t)$ 单调且有连续的导数，则有 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

二、两类特殊的定积分

（一）对称区间上的定积分

设 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 $[-a,a]$,上可积，则

（1）当 $f(x)$ 为奇函数时，$\int_{-a}^a f(x)dx=0;$（2）当 $f(x)$ 为偶函数时，$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

（二）周期函数的定积分

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，且可积，则对任意实数 a，有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$$

三、定积分的分部积分公式

设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数，则

$$\int_a^b udv=[uv]_a^b-\int_a^b vdu,\text{ 或}\int_a^b uv'dx=[uv]_a^b-\int_a^b vu'dx$$

上述公式称为定积分的分部积分公式。

第五节　广义积分

一、无限区间上的积分

（一）$[a,+\infty]$ 上的广义积分

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 内连续，对于任意给定的 $t>a$，积分 $\int_a^t f(x)dx$ 都存在，它是 t 的函数，如果极限 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在无限区间 $[a,+\infty]$ 上的广义积分，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$。 即 $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$

说明：

1.若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ 存在，称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ 不存在，称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散

2. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 就是原函数 $\int_a^x f(t)dt$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限。

（二）（－∞，b]上的广义积分

如果 $f(x)$ 在（－∞，b]上连续，则 $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim\limits_{t\to\infty}\int_t^b f(x)dx$。若 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_t^b f(x)dx$ 存在，则称 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛；若 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_t^b f(x)dx$ 不存在，则称 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散。

（三）$(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分的定义

如果 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$

当 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 与 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ 均收敛时， $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

当 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 与 $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ 有一个发散时， $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

（四）无穷区间上的牛顿-莱布尼兹公式

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_{a}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a)$。记作：

$F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$， $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

于是有： $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{+\infty}$

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

注意：$F(+\infty)$ 和 $F(-\infty)$ 是极限，广义积分是否收敛，取决于这些极限是否存在。

二、无界函数的积分

（一）函数 $f(x)$ 在 $x=b$ 处无界

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,当 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$，如果极限 $\lim\limits_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$ 存在，则称该极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的反常积分（或瑕积分），$x=b$ 是函数 $f(x)$ 的瑕点。记作 $\int_{a}^{b} f(x)dx$，即 $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$ 。

说明：若 $\lim\limits_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$ 存在，也称 $\int_{a}^{b} f(x)dx$ 收敛；

若 $\lim\limits_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$ 不存在，也称 $\int_{a}^{b} f(x)dx$ 发散。

（二）函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处无界

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，而 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$，则 $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)dx$ ；

说明：若 $\lim\limits_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)dx$ 存在， 则 $\int_{a}^{x} f(x)dx$ 收敛；

$\lim\limits_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)dx$ 不存在，则 $\int_{a}^{x} f(x)dx$ 发散。

（三）函数 $f(x)$ 在区间内一点 c 处无界

若 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上连续，而 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$，且广义积分 $\int_{a}^{c} f(x)dx$ 与 $\int_{c}^{b} f(x)dx$ 都收敛，则广义积分 $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$ 。

如果 $\int_{a}^{c} f(x)dx$ 及 $\int_{c}^{b} f(x)dx$ 至少有一个发散，则称广义积分 $\int_{a}^{b} f(x)dx$ 发散。

注意：无界函数的广义积分，在形式上与定积分没有区别，计算时注意对它的识别。

第六节　定积分的应用

一、平面图形的面积

（一）x—型平面图形的面积计算

若由 $y=f(x)(f(x)\geq 0), x=a, x=b及y=0$ 围成平面图形称为 x—型平面图形。其面积计算公式为：$A=\int_a^b f(x)dx$。

由曲线 $y=f_1(x), y=f_2(x)(f_1(x)\leq f_2(x))$ 及直线 $x=a, x=b$ 围成的平面图形，

其面积计算公式为：$A=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$

（二）y—型平面图形的面积计算

由曲线 $x=\varphi(y)$ 及直线 $y=c, y=d$ 围成的平面图形，称为 y—型平面图形，其面积计算公式为：$A=\int_c^d \varphi(y)dy$。

由曲线 $x=\varphi_1(y), x=\varphi_2(y)$ 及直线 $y=c, y=d$ 围成的平面图形，其面积计算公式为：$A=\int_c^d\left[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\right]dy$

二、旋转体的体积计算

（一）绕 x 轴旋转的旋转体的体积计算

由连续曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形，绕 x 轴旋转一周而成的立体叫做旋转体。该旋转体体积为：$V=\int_a^b \pi f^2(x)dx$

（二）绕 y 轴旋转的旋转体的体积计算

由曲线 $x=\psi(y)$,直线 $y=c$、$y=d$ $(c<d)$及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积。该旋转体体积为：$V=\int_c^d \pi\psi^2(y)dy$

三、已知平行截面面积的立体的体积

设一物体被垂直于某直线的平面所截的平面面积可求，不妨设上述直线为 x 轴，在 x 处的截面积 $A(x)$ 是 x 的已知连续函数，则该物体介于平面 $x=a$ 和 $x=b$（$a<b$）之间的体积为：$V=\int_a^b A(x)dx$。

四、经济应用问题举例

第二部分　概率论初步（21 学时）

第一章　随机事件及其概率

本章知识点：

1．随机事件及其运算（随机试验，随机事件与样本空间，事件之间的关系及其运算）;

2．概率的定义、性质及其运算（频率，概率的统计定义，古典概率，概率的公理化定义，概率的性质）;

3．条件概率及三个重要公式（乘法公式，全概率公式，贝叶斯公式）;

4．事件的独立性及贝努里(Bernoulli)概型。

本章教学目的与基本要求：

1.理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件的关系与基本运算；

2.理解事件频率的概念，了解随机现象的统计规律性，理解概率的公理化定义和概率的其它性质；

3.理解古典概率的定义，掌握古典概率的计算，了解几何概率的定义及计算；

4.掌握概率的基本性质和应用这些性质进行概率计算；

5.理解条件概率的概念，熟练掌握条件概率的计算，熟练掌握乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式以及应用这些公式进行概率计算；

6.理解事件的独立性概念，掌握应用事件独立性进行概率计算，理解贝努利试验的概念，熟练掌握二项概率公式（贝努利概型）及其应用。

本章教学重点：

随机事件、事件的关系及运算、古典概型、概率的基本性质、条件概率、全概率公式、贝叶斯公式、事件的独立性、贝努利概型

本章教学难点：

事件的关系及运算、古典概型、条件概率、全概率公式、贝叶斯公式、事件的独立性、全概率公式的综合应用、贝努利概型。

本章学时分配：9 学时

第一节　随机事件

一、概率论序言

二、随机试验与随机事件

（一）随机试验

1．试验可在相同条件下重复进行；

2．每次试验的可能结果不止一个，而究竟会出现哪一个结果，在试验前不能准确地预言；

3．试验所有可能结果在试验前是明确(已知)的，而每次试验必有其中的一个结果出现，并且也仅有一个结果出现。

满足上述三个特性的试验，叫做随机试验，简称试验，并用字母 E 等表示。

（二）随机事件

随机试验的结果称为随机事件，简称事件。

1．必然事件：在试验中一定出现的结果，记作 Ω；

2．不可能事件：在试验中一定不会出现的结果，记作Φ；

3．随机事件：在试验中可能出现也可能不出现的结果，常用 A、B、C…表示；

4．基本事件(样本点)：试验最基本的结果，记作 ω；

5．样本空间(基本事件空间)：所有基本事件的集合，常用 Ω 表示；

样本空间 Ω 中的元素是随机试验的可能结果。样本空间的任一子集称作随机事件。在一次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生。显然 Ω 为必然事件，Φ 为不可能事件。

三、随机事件间的关系与运算

（一）随机事件间的关系

1.包含：若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称 A 是 B 的子事件，记作 $A \subset B$，或 $B \supset A$。

2.相等：若 $A \subset B$ 且 $B \supset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 A=B。其直观意义是事件 A 与 B 的样本点完全相同。

（二）随机事件的运算

1．事件的和（并）

若事件 A 和事件 B 至少有一个发生，则称这样的事件为事件 A 与 B 的和事件，记作 $A \cup B$ 或 $A+B$。事件 $A \cup B$ 是属于 A 或属于 B 的样本点组成的集合。

2．件的差

若事件 A 发生而事件 B 不发生，则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的差，记作 A-B。

3．事件的积（交）

若事件 A 与事件 B 同时发生，则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的积，记作 AB 或 A∩B。

4.互不相容事件(或互斥事件)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB = \Phi$ (即 A 与 B 同时发生是不可能事件)，则称事件 A 与 B 是互不相容(互)事件。其直观意义是事件 A 与 B 没有公共样本点。

5．对立事件（或互逆事件）

在每次试验中，若事件 A 与事件 B 必有一个发生，且仅有一个发生，则称事件 A 与 B 为对立事件或互为逆事件。即有：$AB = \Phi$，且 $A + B = \Omega$。事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$。

6．完备事件组

若事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两互不相容，且每次试验必出现且只出现一个，则称 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 构成一个完备事件组。完备事件组中事件个数可以是有限个，也可以是可数个。

（三）随机事件的运算规律

对于任意事件 A,B,C 有：

1．交换律：A+B=B+A；AB=BA

2．结合律：A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C；ABC=A(BC)=(AB)C

3．分配律：A(B+C)=AB+AC；A(B-C)=AB-AC

4．对偶律(德摩根律)：$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$；$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

交换律、结合律、分配律、对偶律都可推广到任意多个事件的情形。

（四）随机事件间的关系与运算综合应用

第二节　随机事件概率的定义

一、概率的统计定义

（一）频率的稳定性

考虑在相同条件下进行的 S 轮试验，事件 A 在各轮试验中的频率形成一个数列

$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots \frac{m_s}{n_s},$

当各轮试验次数 $n_1, n_2, \ldots$，n_s 充分大时，在各轮试验中事件 A 出现的频率之间、或者它们与某个平均值相差甚微.

（二）概率的统计定义

在实际中，当概率不易求出时，人们常取实验次数很大时事件的频率作为概率的估计值，

这种确定概率的方法称为频率方法。

二、概率的古典定义

（一）古典概型

若一个随机试验的结果只有有限个，且每个结果出现的概率都相同，则称这样的试验为古典型随机试验(或称古典概型)。

（二）古典概率定义

对于古典概型试验中的事件 A，其概率为 $P(A)=\dfrac{A\text{中包含的样本点数}}{\text{样本空间中样本点数}}$

（三）古典概型中事件概率的计算

三、概率的公理化定义与性质

（一）概率的公理化定义

公理 1（非负性）：任一事件的概率介于 0 和 1 之间

公理 2（规范性）：样本事件空间的概率为 1

公理 3（可列可加性）：若可列个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两互不相容，则和事件的概率等于各事件的概率之和

这里事件个数可以是有限或无限的.

（二）概率的性质

性质 1：对任一事件 A ，有 $p(\overline{A})=1-p(A)$

性质 2：不可能事件的概率为 0，即 $P(\Phi)=0$

性质 3：设 A 、B 是两个事件，若 $A\subset B$ ，则有

$p(A)\le p(B)$；$p(B-A)=p(B)-p(A)$

性质 4：概率具有有限可加性，即若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两互斥，则

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

性质 5：对任意两个事件 A、B，有 $p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB)$

推广：$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-[P(AB)+P(AC)+P(BC)]+P(ABC)$

第三节　条件概率与全概公式

一、条件概率

（一）条件概率的概念

在事件 B 发生的条件下求事件 A 发生的概率，记作 P(A|B)，称作条件概率.

一般情况下： $P(A|B) \neq P(A)$。

（二）条件概率的定义

对于任意两个事件 A 与 B，其中 P(A)>0 ，则事件 B 在事件 A 发生的条件下的条件概率为：

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

（三）条件概率的性质

设 B 是一事件，且 P(B)>0,则

1.对任一事件 A，0≤P(A|B)≤1；　2.P(S|B) =1；

3.设 $A_1,\ldots,An$ 互不相容，则 $P[(A_1+\ldots+An)|B] = P(A_1|B)+\ldots+P(An|B)$。

（四）条件概率的计算

二、乘法公式

（一） $p(AB)=p(A)p(B/A)$； $p(AB)=p(B)p(A/B)$

（二） $p(A_1A_2\cdots A_n)=p(A_1)p(A_2/A_1)\cdots p(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})$

（三）乘法公式应用实例

三、全概公式与贝叶斯公式

（一）全概公式

设 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$，则对任一事件 B (P(B)＞0)，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)$$

（二）贝叶斯公式(逆概公式)

设 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 是一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$，则对于任一事件 B(P(B)＞0)，有

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

（三）全概公式与贝叶斯公式综合应用

第四节　贝努利概型

一、随机事件的独立性

（一）两事件的独立

对于两个事件 A 与 B，若 P(AB)=P(A)P(B)，则称事件 A 与 B 独立。

若事件 A 与事件 B 独立，则事件 A 与 $\overline{B}$， $\overline{A}$ 与 B， $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

（二）多个事件的独立

对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$，若其中任两个事件均相互独立，即对于任意整数 $k(1<k\le n)$ 和任意 k 个整数 $i_1, i_2, \cdots, i_k \quad (1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n)$, 都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立，则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 相互独立。

注意：

若 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 相互独立，则其中任意的 $k(1<k\le n)$ 个事件也相互独立。特别当 k＝2 时，它们中的任意两个事件都相互独立(称为两两独立)。但 n 个事件两两独立不能保证这 n 个事件相互独立。实际问题中，往往根据问题的实际意义来判定独立性。

（三）事件独立在概率计算中的应用

二、贝努利概型

（一）独立重复试验

在两个或多个独立试验中，若同一事件在各个试验中出现的概率相同，则称它们是相互独立的重复试验。

（二）贝努利概型

满足以下三个条件的随机试验，称为 n 重贝努利试验。

1．试验可以独立重复的进行 n 次；2．试验只有 A 与 $\overline{A}$ 两个结果；3．每次试验中，试验 A 出现的概率不变，即 $P(A)=p \quad (0<p<1)$ 为常数。

在 n 重贝努利试验中，事件 A 出现 k (0≤k≤n)次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\cdots,n$$

此公式称为二项概率公式。

（三）贝努利概型应用

第二章　一元随机变量及其分布

本章知识点：

1.随机变量的概念，随机变量的分布函数概念及其性质；

2.离散型随机变量及其概率分布，离散型随机变量常见分布；

3.连续性随机变量及其概率密度函数，连续性随机变量常见的分布；

4.随机变量的函数的分布。

本章基本要求：

1.理解随机变量及其分布函数的概念，掌握其性质；

2.理解离散型随机变量的概念及其分布列的概念和性质；

3.理解连续型随机变量的概念及其概率密度函数的概念和性质；

4.会利用分布列、概率密度函数及分布函数计算有关事件的概率；

5.熟练掌握二项分布，泊松(Pisson)分布，正态分布，了解均匀分布和指数分布；

6.会求简单随机变量函数的概率分布。

本章重点与难点：

离散型随机变量及其分布律、分布函数、连续型随机变量及其分布函数、密度函数、二项分布、泊松分布、均匀分布、正态分布及其查表计算。

本章重点与难点：

分布函数的概念和求法，密度函数的概念，随机变量及其函数的分布求法。

学时分配：6 学时

第一节　随机变量与分布函数

一、随机变量的概念

（一）随机变量的定义

设 E 为随机试验，它的样本空间为 Ω={ω}。若对于每一个样本点 ω∈Ω，都有唯一确定的实数 X (ω)与之对应，则称 X(ω)是一个随机变量(可简记为 X)。常用大写字母 X，Y，Z 等表示。

（二）引入随机变量的意义

（三）随机变量的分类

1．离散型随机变量与非离散型随机变量（主要是连续型随机变量）

2．一元随机变量与多元随机变量

二、随机变量的分布函数

（一）随机变量分布函数的定义

对于随机变量 X 和任意实数 x，称函数$F(x)=P(X\le x)$为随机变量 X 的分布函数。它在点 x 处的值是事件{X≤x}的概率。

（二）分布函数$F(x)$的性质

1.$F(x)$是单调不减函数；

2．$F(x)$右连续，即对任意的$x_0\in$R，有$F(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$

3．$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

第二节　离散型随机变量及其概率分布

一、离散型随机变量的概率分布

（一）离散型随机变量概率分布的定义

1．一个随机变量的一切可能的取值为有限个或可列无穷多个，则称它为离散型随机变量。

2．X 是一个离散型随机变量，其一切可能值为$\{x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots\}$，且 X 取各值时的概率为

$P\{X = x_k\} = p_k \quad ,k = 1,2,\cdots,$

其中 $p_k \geq 0(k = 1,2,\cdots)$，且$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$，则称上式为 X 的概率分布，常记为

$$X \sim \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{Bmatrix}$$

3．对于任意实数 $a < b$，有 $P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_k \leq b} P(X = x_k)$

（二）离散型随机变量概率分布的表示方法

1．列表法；2．图示法；3．公式法

（三）离散型随机变量的分布函数

二、几种重要的离散型随机变量

（一）超几何分布

如果随机变量 X 的概率分布为$P(X = k) = \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \quad k = 0,1,\cdots,n$

其中 N,M,n 均为正整数，且$M \leq N, n \leq N$,则称 X 服从参数为 N,M,n 的超几何分布。

（二）几何分布

如果随机变量 X 的概率分布为$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p \qquad k = 1,2,\cdots,0 < p < 1$

则称X服从几何分布。

（三）二项分布

设事件 A 在任一次试验中出现的概率为 P，则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数 k 的取值为 0,1,2，…,n,且它的概率分布为$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 1,2,3,\cdots n$

则称 X 服从参数为 n,p 的二项分布，记为$X \sim B(n, p)$

（四）泊松分布

如果随机变量 X 的概率分布为$P(X = k) = \dfrac{\lambda^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda}$，k＝0,1,2, …, （$\lambda > 0$）

则称 X 服从参数为λ的泊松分布。

三、几个分布之间的关系

（一）二项分布与超几何分布

当 N,M 充分大，而 n 相对 N 充分小时，超几何分布与二项分布有如下的近似：

$$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \approx C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k (1 - \frac{M}{N})^{n-k}$$

（二）二项分布与 0—1 分布

如果随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都服从 0—1 分布，则 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 服从二项分布 B(n,p)

（三）二项分布与泊松分布

如果 X 服从二项分布 B(n,p)，且 n 充分大（n≥100）,p 充分小（p<0.1）,而 np 适中，则有如下近似公式： $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \quad k = 0,1,2,3,\cdots n$

第三节　连续型随机变量及其概率密度

一、连续型随机变量的概率密度

（一）问题引入

（二）连续型随机变量及其密度函数的定义

对于随机变量 X，其分布函数为 $F(x)$，如存在非负可积函数 $f(x)$,使得对于任意实数 x，有 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$，则称 X 为连续型随机变量，$f(x)$ 称为 X 的概率密度函数。

（三）概率密度函数的性质

性质 1: $f(x) \geq 0$， $-\infty < x < +\infty$；

性质 2: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$；

性质 3: 对于任意实数 $a, b (a < b)$，都有 $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

注意：

连续型随机变量 X 取任何给定值的概率等于 0，则 $P\{X = a\} = 0$。所以有

$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

（四）连续型随机变量的分布函数与概率密度的关系

对于一个随机变量 X，其分布函数 $F(x)$ 与概率密度 $f(x)$ 之间有如下关系：

对于 $f(x)$ 的任一连续点 x，均有 $f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

二、几种重要的连续型随机变量

（一）均匀分布

如果随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \mathrm{a} < x < \mathrm{b} \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$，则称 X 在区间 (a,b) 内服从均匀分布，记为 X～(a,b),其分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b, \end{cases}$。

（二）指数分布

如果随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$，则称 X 为服从参数为 λ（λ>0）的指

数分布，记为 X～$e(\lambda)$,其分布函数为$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}，x>0，\\0，x\le 0，\end{cases}$。

（三）正态分布

1. 正态分布的概率密度

如果随机变量 X 的概率密度为$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$， $x\in R$。则称 X 服从参数为μ,σ^2的正态分布，记为 X～N（μ,σ^2），其中参数μ ∈R，$\sigma>0$。

2. 正态曲线

正态概率密度函数$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$的图形是一条钟罩形曲线，称之为正态曲线。有如下性质：

性质 1:曲线关于直线$x=\mu$对称；

性质 2:当$x=\mu$时，$\varphi(x)$达到最大值$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$；

性质 3:曲线以x轴为渐近线；

性质 4:当$x=\mu\pm\sigma$时，曲线有拐点；

性质 5:若固定μ，改变σ的值，σ越小，曲线“越瘦越高”；σ越大，曲线“越矮越胖”。

3. 标准正态分布

当$\mu=0,\sigma=1$时，称 X 服从标准正态分布，记为 X～N（0,1）

标准正态分布随机变量的概率密度和分布函数分别用$\varphi_0(x)$和$\Phi_0(x)$表示，即

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},x\in R；\quad \Phi_0(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_O(\mathrm{t})dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,x\in R。$$

4.正态分布的性质

性质 1:对于标准正态分布的随机变量 X，其密度函数$\varphi_0(x)$是偶函数；

性质 2:如果随机变量 X～N（μ,σ^2），则$\dfrac{X-\mu}{\sigma}$～N（0,1）；

性质 3:设 X～N（0,1），对于给定的$\alpha,(0<\alpha<1)$；

如果Z_α满足$P(X>Z_\alpha)=\int_{Z_\alpha}^{+\infty}\varphi_0(x)dx=\alpha$，即$\Phi_0(Z_\alpha)=1-\alpha$，称$Z_\alpha$为标准正态分布的上侧 α 分位数；如果$Z_\alpha$满足$\Phi_0(Z_\alpha)-\Phi_0(-Z_\alpha)=1-\alpha$，称$Z_\alpha$为标准正态分布的双侧分位数.

5．正态分布的概率计算及应用

三、拉普拉斯定理——二项分布的正态近似

（一）棣莫弗-拉普拉斯定理

设随机变量 X 服从参数 n 和 p 的二项分布，即 X～B(n,p)，$(0<p<1)$，则对于任意正数 x，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\}=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$。

即当 n 很大时，二项分布以正态分布为极限$\mu=np,\sigma^2=np(1-p)$。

（二）拉普拉斯局部极限定理

设随机变量 X 服从参数 n， p（0<p<1）的二项分布，则对任意 x，有

$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}\approx\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，其中：$\mu=np,\sigma^2=npq$

（三）拉普拉斯积分极限定理

设随机变量 X 服从参数 n, p（0<p<1）的二项分布，则对任意 x，有

$$P(a < X < b) = \sum_{k} C_n^k p^k q^{n-k} = \Phi_0(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi_0(\frac{a-np}{\sqrt{npq}})$$

第四节　随机变量函数的概率分布

一、问题的提出

二、离散型随机变量函数的概率分布

设 X 是离散型随机变量，概率分布为 $P(X = x_k) = p_k \quad k = 1,2,\cdots$

则随机变量函数 $Y = g(X)$ 取值 $g(x_k)$ 的概率为 $P(Y = g(x_k)) = p_k \quad k = 1,2,\cdots$。如果函数值 $g(x_k)$ 中有相同的数值，则将它们相应的概率之和作为随机变量 $Y = g(X)$ 取该值的概率，就可以得到 $Y = g(X)$ 的概率分布。

三、连续型随机变量函数的概率分布

第三章　随机变量的数字特征

本章知识点：

1．随机变量数学期望的定义及其性质，随机变量函数的数学期望；

2．随机变量方差的定义及其性质；

3．协方差，相关系数的定义与计算公式；

4．几种重要随机变量的数学期望与方差。

本章基本要求：

1．理解数学期望与方差的概念，掌握他们的性质与计算方法；

2．会计算随机变量函数的数学期望；

3．熟记二项分布，泊松分布，正态分布的数学期望与方差，知道均匀分布，指数分布的数学期望与方差；

4．了解协方差，相关系数的概念，掌握他们的性质与计算方法。

重点与难点：期望、方差及其性质和计算，

学时分配：6 学时

第一节　数学期望

一、数学期望的概念

（一）离散型随机变量的数学期望

设离散型随机变量 X 的概率分布为$P\{X=x_k\}=p_k$　　k=1,2,…，如果无穷级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$绝对收敛，则称此级数的和为随机变量 X 的数学期望(或均值)，记作 E(X)或 EX，即$EX=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$。

(二) 连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量 X 的概率密度为$f(x)$，如果广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$绝对收敛，则称此积分值为随机变量 X 的数学期望，记作 EX，即$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$。

如果上述级数或积分不绝对收敛，则称此随机变量的数学期望不存在。

二、数学期望的性质

（一）对于常数 C，有 EC=C

（二）对于常数 C 及随机变量 X，有 E(CX)=CE(X)

（三）设 X 和 Y 为两个随机变量，则 E(X+Y)=E(X)+E(Y)

（四）设随机变量 X 和 Y 独立，则 E(XY)=E(X)E(Y)

三、随机变量函数的数学期望

设$y=g(x)$为连续函数，而 X 是任一随机变量，则随机变量$Y=g(X)$的数学期望可以通过随机变量 X 的概率分布直接求出：

$$EY=Eg(X)=\begin{cases}\sum_k g(x_k)P\{X=x_k\} & X\text{是离散的}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx & X\text{是连续的}\end{cases}$$

四、数学期望的应用

第二节　方差

一、方差的概念及其简化计算公式

设 X 是一随机变量，如果数学期望 $E(X-EX)^2$ 存在，则称之为 X 的方差，记作 DX。$\sqrt{DX}$ 称为 X 的标准差。

计算方差的简便公式：$DX=EX^2-(EX)^2$

二、方差的性质

（一）设 C 是常数，则 DC=0

（二）设 X 是随机变量，C 是常数，则 D(X+C)=DX，$D(cX)=c^2\cdot DX$

（三）设随机变量 X 与 Y 相互独立，则 $D(X\pm Y)=DX+DY$

（四）$DX\geq 0$，并且 DX=0 当且仅当以概率 1 取常数，即 $P\{X=c\}=1$，其中 $c=EX$

三、常用随机变量的数学期望与方差

（一）如果 X 是服从 0—1 分布的随机变量，即 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$

则 $EX=p,DX=p(1-p)$

（二）如果 X～$B(n,p)$，则 $EX=np$，$DX=np(1-p)$

（三）如果 X～$P(\lambda)$，则 $EX=DX=\lambda$

（四）如果 X～$U(a,b)$，则 $EX=\frac{a+b}{2}$，$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$

（五）如果 X～$e(\lambda)$，则 $EX=\frac{1}{\lambda}$，$DX=\frac{1}{\lambda^2}$

（六）如果 X～$N(\mu,\sigma^2)$，则 $EX=\mu$，$DX=\sigma^2$

第三部分　线性代数初步（选修 21 学时）

第一章　行列式

本章教学基本要求：

1．了解二阶、三阶行列式的定义；

2．熟练掌握行列式的性质及按行列展开定理；

3．理解克莱姆法则，会应用克莱姆法则解二、三元线性方程组；

本章知识点、重点与难点：

知识点：二阶、三阶行列式的概念与计算，行列式的性质，行列式按行（列）展开定理，克莱姆法则。

重点：行列式的概念、性质及计算，展开定理，克莱姆法则

难点：　行列式展开定理

学时分配：9 学时

第一节　二阶、三阶行列式

一、二阶行列式的引入与计算

（一）二元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$，　若$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则二元线性方程组有唯一解：　$x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$，　$x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$

引入$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$（由二元线性方程组的系数决定，也称为系数行列式）

（二）定义：由四个数排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$构成的表达式$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$称为数表所确定的二阶行列式，记作$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，即

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$。

（三）二阶行列式的计算——对角线法则

即主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素。

利用二阶行列式求解二元线性方程组：若$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则二元性方程组的解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}，\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

注意：分母都为原方程组的系数行列式。

二、三阶行列式的引入与计算

（一）定义：设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$。

记 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

称为上面数表所确定的三阶行列式。

（二）三阶行列式的计算－对角线法则

说明：（1）对角线法则只适用于二阶与三阶行列式

（2）三阶行列式包括 3！项，每一项都是位于不同行，不同列的三个元素的乘积，其中三项为正，三项为负。

（3）每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列。

（三）利用三阶行列式求解三元线性方程组

若三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ 的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

记 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$　$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$　$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

则 $x_1 = \frac{D_1}{D}$，$x_2 = \frac{D_2}{D}$，$x_3 = \frac{D_3}{D}$。

三．n 阶行列式的定义

第二节　行列式的性质

一、将行列式转置，行列式的值不变；

二、交换行列式的两行（列），行列式的值变号；

推论: 如果行列式有两行（列）的对应元素相同，则此行列式的值为零；

三、用数 k 乘行列式的某一行（列），等于以数 k 乘此行列式；

推论 1:如果行列式某行（列）的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式外面；

推论 2:如果行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式的值等于零；

四、如果将行列式中的某一行（列）的每一个元素都写成两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和，这两个行列式分别以这两个数为所在行（列）对应位置的元素，其它位置的元素与行列式相同；

推论：如果将行列式中的某一行（列）的每一个元素都写成 m 个数（m 为大于 2 的整数）的和，则此行列式可以写成 m 个行列式的和；

五、将行列式的某一行（列）的所有元素同乘以数 k 后加于另一行（列）对应位置的元素上，

行列式的值不变。

第三节 行列式按行（列）展开

一、余子式与代数余子式

（一）余子式

定义：在n阶行列式$D=|a_{ij}|$中去掉元素a_{ij}所在的第i行和第j列后，余下的n—1阶行列式，称为D中元素的余子式，记为M_{ij}。

（二）代数余子式

定义：D中元素a_{ij}的余子式M_{ij}前添加符号$(-1)^{i+j}$，称为a_{ij}的代数余子式，记为A_{ij}，即$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

二、行列式按行（列）展开法则

n阶行列式$D=|a_{ij}|$等于它的任意一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积的和，即

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots a_{in}A_{in}\qquad(i=1,2,\cdots n)$ $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots a_{nj}A_{nj}\qquad(j=1,2,\cdots n)$

三、关于代数余子式的重要性质

n阶行列式$D=|a_{ij}|$中任意一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积的和等于零，即

$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots a_{in}A_{sn}=0\qquad(i,s=1,2,\cdots n\quad i\neq s)$

$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots a_{nj}A_{nt}=0\qquad(j,t=1,2,\cdots n\quad j\neq t)$

综合有：$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$；$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$。其中$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

第四节 克莱姆法则

一、引例

（一）二元线性方程组的解

若二元线性方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$，系数行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$，

则二元线性方程组有唯一解: $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}$， $x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}$

（二）三元线性方程组的解

三元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$，系数行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$，

则三元线性方程组有唯一解：$x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$

其中$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

二、克莱姆法则

（一）若n元线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$,当线性方程组的系数行列式

$D\neq 0$时，方程组有且仅有唯一解$x_j=\dfrac{D_j}{D} \quad (j=1,2,\cdots n)$

其中D_j是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式，即$D_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$

（二）非齐次线性方程组与齐次线性方程组的定义

设线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$，若常数项$b_1,b_2,\cdots,b_n$不全为零,则称此方程组为非齐次线性方程组；若常数项$b_1,b_2,\cdots,b_n$全为零,此时称方程组为齐次线性方程组。

三、重要定理

（一）非齐次线性方程组的相关定理

1.如果有n个未知数n个方程的非齐次线性方程组的系数行列式不为零，则该方程组一定有解,且解是唯一的。

2.如果有n个未知数n个方程的非齐次线性方程组无解或有无穷多个不同的解，则它的系数行列式必为零。

（二）齐次线性方程组的相关定理

1.如果有n个未知数n个方程的齐次线性方程组的系数行列式不为零，则该齐次线性方程组仅有非零解。

2.如果有n个未知量n个方程的齐次线性方程组有非零解，则它的系数行列式必为零。

第二章　矩阵与线性方程组

本章教学基本要求：

1.理解矩阵的概念，了解单位矩阵、对角矩阵、上（下）三角矩阵、对称矩阵与反对称矩阵，行阶梯形矩阵和行最简形矩阵，以及它们的性质；

2.熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置运算，以及它们的运算规律，理解方阵的幂，掌握方阵乘积的行列式；

3.理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质，以及矩阵可逆的充要条件；

4.熟练掌握矩阵的初等变换，理解矩阵秩的概念，熟练掌握用伴随矩阵法和初等变换法求逆矩阵，掌握用初等变换法求矩阵的秩；

会用消元法解线性方程组；

5.熟练掌握用初等变换的方法求方程组解的方法；

6.了解线性方程组的一般形式、矩阵形式，掌握线性方程组有解的判定定理。

本章知识点、重点与难点：

知识点：矩阵的概念、性质、运算，几种特殊的矩阵，逆矩阵，矩阵的秩，矩阵的初等变换。

重点：矩阵的线性运算、乘法、转置，以及它们的运算规律；逆矩阵的概念及求法；　用伴随矩阵法和初等变换法求逆矩阵，求矩阵的秩；用初等行变换求解线性方程组。

难点：初等变换法求逆矩阵，及解矩阵方程；熟练掌握用初等行变换求解线性方程组的方法。

学时分配：12 学时

第一节　矩阵的概念

一、矩阵概念的引入

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 的解取决于系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 及常数项 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$。线性方程组的系数与常数项按原位置可排为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

对线性方程组的研究可转化为对这张表的研究。

二、矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表称为 $m\times n$ 矩阵。

记作$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$。

三、几种特殊矩阵

（一）方阵：行数与列数都等于n的矩阵A，称为n阶方阵A。

（二）行矩阵与列矩阵

1.只有一行的矩阵称为行矩阵(或行向量)。

2.只有一列的矩阵称为列矩阵(或列向量)。

（三）单位矩阵：$E=E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

（四）零矩阵：元素全为零的矩阵称为零矩阵

（五）对角矩阵：$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 记作$A=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

（六）同型矩阵

1.概念：两个矩阵的行数相等,列数相等时,称为同型矩阵

2.两个矩阵相等

两个矩阵$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$为同型矩阵,并且对应元素相等,即

$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$,

则称矩阵$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$相等,记作$A=B$

（七）（上、下）三角矩阵

（八）行阶梯矩阵、行最简形矩阵

1.行阶梯矩阵特点：

（1）可划出一条阶梯线，线的下方全为零；（2）每个台阶只有一行；

（3）台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素为非零元。

2.行最简形矩阵

行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在列的其它元素全为 0。

3.结论

（1）对于任何矩阵$A_{m\times n}$,总可经过有限次初等行变换变为行阶梯形和行最简形。

（2）行最简形矩阵再经过初等列变换，可化成标准形。

第二节　矩阵的运算

一、矩阵的加法

（一）定义：设有两个$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$与$B=(b_{ij})$，那么矩阵A与B的和记作$A+B$，规

定为 $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

说明：只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算。

（二）矩阵加法的运算规律

1. $A+B=B+A$

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$

3. $-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}=-(a_{ij})$ 称为矩阵 A 的负矩阵。

4. $A+(-A)=0, A-B=A+(-B)$

二、数与矩阵的乘法

（一）定义：数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A=A\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

（二）数乘矩阵的运算规律

设 A 与 B 为 $m\times n$ 矩阵，λ,μ 为数

1. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

2. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

3. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

矩阵相加与数乘矩阵合起来，统称为矩阵的线性运算。

三、矩阵的乘法

（一）定义：设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad (i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $C=AB$。

注意：只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘。

（二）矩阵乘法的规律

1. $(AB)C=A(BC)$

2. $A(B+C)=AB+AC \qquad (B+C)A=BA+CA$

3. $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$（其中 λ 为数）

4. $AE=EA=A$

5.若 A 是 n 阶矩阵，则 A^k 为 A 的 k 次幂，即 $A^k=AA\cdots A$（k 个 A 相乘）且 $A^mA^k=A^{m+k}$，$(A^m)^k=A^{mk}$（m,k 为正整数）。

注意：矩阵的乘法不满足交换律，即 $AB \neq BA$，$(AB)^k \neq A^k B^k$。

四、矩阵的其它运算

（一）转置矩阵

1.定义：把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T。

2.转置矩阵的运算性质

（1）$\left(A^T\right)^T = A$　　（2）$(A+B)^T = A^T + B^T$

（3）$(\lambda A)^T = \lambda A^T$　　（4）$(AB)^T = B^T A^T$

（二）对称矩阵与反对称矩阵

1.定义：设 A 为 n 阶方阵，若满足 $A = A^T$，即 $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1,2,\cdots,n)$ 那末 A 称为对称阵。若 $A^T = -A$，则称矩阵 A 的反对称矩阵。

2.应用

设 A 与 B 是两个对称矩阵，当且仅当 A 与 B 可交换时，AB 是对称的。

（三）方阵的行列式

1.定义：由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$。

2.方阵的行列式运算性质

（1）$\left|A^T\right| = |A|$；（2）$|\lambda A| = \lambda^n |A|$ ；（3）$|AB| = |A||B|$

（四）伴随矩阵

1.定义：行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵，称为矩阵 A 的伴随矩阵 A^*，

即 $A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$

2.性质：$AA^* = A^*A = |A|E$

第三节　逆矩阵

一、概念的引入

在数的运算中，当数 $a \neq 0$ 时，有 $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ 为 a 的倒数（或称 a 的逆）。在矩阵的运算中，单位矩阵 E 相当于数的乘法运算中的 1，那么，对于矩阵 A，若存在一个矩阵 A^{-1}，使得

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$

则矩阵 A^{-1} 称为 A 的可逆矩阵或逆阵。

二、逆矩阵的概念和性质

（一）定义

对于 n 阶矩阵 A，若有一个 n 阶矩阵 B，使得 $AB = BA = E$，则说矩阵 A 是可逆的，并把矩阵 B 称为 A 的逆矩阵。A 的逆矩阵记作 A^{-1}。

说明：若 A 是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是唯一的。

（二）定理:矩阵A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$，且$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$，其中$A^{*}$为矩阵$A$的伴随矩阵。

推论：若$AB=E$（或$BA=E$），则$B=A^{-1}$。

（三）奇异矩阵与非奇异矩阵

当$|A|=0$时，A称为奇异矩阵，当$|A|\neq 0$时，A称为非奇异矩阵。则A是可逆矩阵的充要条件是A为非奇异矩阵。

（四）逆矩阵的运算性质

1．若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$。

2．若A可逆，数$\lambda\neq 0$，则λA可逆，且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$。

3．若A，B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

4．若A可逆，则A^{T}亦可逆，且$\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$。

5．若A可逆，则有$\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}$。

三、用逆矩阵解矩阵方程

（一）若已知$AX=B$,且A可逆，则$X=A^{-1}B$。

（二）若已知$XA=B$，且A可逆，则$X=BA^{-1}$

（三）若已知$AXB=C$，且A，B均可逆，则$X=A^{-1}CB^{-1}$。

四、逆矩阵的计算方法

（一）待定系数法；（二）伴随矩阵法：$A^{-1}=\frac{A^{*}}{|A|}$；（三）初等变换法

第四节　矩阵的初等变换

一、矩阵的三种初等行（列）变换

（一）对调矩阵的两行(列)；

（二）以数k乘以矩阵某一行（列）的所有元素；

（三）以数k乘以矩阵某一行（列）的所有元素加到另一行（列）对应的元素上去。

二、矩阵等价

（一）若矩阵A经有限次的初等变换变成矩阵B，就称矩阵A与B等价，记作$A\sim B$。

（二）等价关系的性质：

1．反身性：$A\sim A$；　2．对称性：若$A\sim B$，则$B\sim A$；

3．传递性：若$A\sim B$，$B\sim C$，则$A\sim C$。

例如，两个线性方程组同解，就称这两个线性方程组等价。

三、初等矩阵

（一）初等矩阵定义：由单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵。

（二）初等矩阵类型

（三）初等矩阵作用

1．交换矩阵两行，相当于用同种初等矩阵左乘该矩阵。

2．交换矩阵两列，相当于用同种初等矩阵右乘该矩阵。

四、行简化阶梯形矩阵和标准形矩阵

对于任何矩阵 $A_{m\times n}$ 总可经过有限次的初等行变换把它化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵。而行最简形矩阵经过初等列变换又可以化为标准形矩阵。

五、利用初等变换法求矩阵的逆矩阵

（一）理论基础

定理 1：设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵。

定理 2：n 阶矩阵可逆的充分必要条件是它可以表示为一些初等矩阵的乘积。

（二）初等变换法求逆矩阵

1． 对 $n\times 2n$ 矩阵 $(A \quad E)$ 施行初等行变换，当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}.

2． 对 $2n\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 施行初等列变换，当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}。

（三）初等变换法求解矩阵方程

1． 对 $n\times 2n$ 矩阵 $(A \quad B)$ 施行初等行变换，当把 A 变成 E 时，原来的 B 就变成 $A^{-1}B$。

2． 对 $2n\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 施行初等列变换，当把 A 变成E时，原来的 B 就变成 BA^{-1}。

第五节　矩阵的秩

一、矩阵的 k 阶子式

在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列（$k\le m, k\le n$），位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为矩阵的 k 阶子式。

二、矩阵秩的定义

设在矩阵 A 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于 0，那么 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵的秩，记作 $R(A)=r$，并规定零矩阵的秩等于 0。

三、矩阵秩的求法

（一）利用定义

（二）利用初等变换法

1.理论根据：矩阵经过初等变换后，其秩不变。

2.方法：用初等行变换把矩阵变成为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵的秩。

第六节　线性方程组的解法

一、消元法解线性方程组

同解变换：把方程组看作一个整体变形，用到如下三种变换,变换前的方程组与变换后的方程组是同解的。

（1）交换方程次序；（2）以不等于 0 的数乘某个方程；（3）一个方程加上另一个方程的k倍。

二、线性方程组的矩阵表示

（一)非齐次线性方程组的矩阵表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{21n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \Rightarrow A_{m\times n}\,x=b$$,其中系数矩阵A，增广矩阵 $B=(A,b)$ 。

（二）齐次线性方程组的矩阵表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{21n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=0 \end{cases} \Rightarrow A_{m\times n}\,x=0$$ ，其中系数矩阵A，增广矩阵 $B=(A,0)$ 。

三、初等行变换法解线性方程组

（一）增广矩阵的初等行变换解非齐次线性方程组

（二）系数矩阵的初等行变换解齐次线性方程组

四、线性方程组有解的判断定理

（一）齐次线性方程组有非零解的判断

n元齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵A的秩$R(A)<n$。

（二）非齐次线性方程组有解、有唯一解、无穷多解与无解的判断

1．n元非齐次线性方程组$A_{m\times n}x=b$有解的充分必要条件是系数矩阵A的秩等于增广矩阵的$B=(A,b)$秩。

2．n元非齐次线性方程组$A_{m\times n}x=b$有唯一解的充分必要条件是系数矩阵A的秩等于增广矩阵的 $B=(A,b)$ 秩且都等于n 。

3．n元非齐次线性方程组$A_{m\times n}x=b$有无穷多解的充分必要条件是系数矩阵A的秩等于增广矩阵的 $B=(A,b)$ 秩且都小于n 。

4．n元非齐次线性方程组$A_{m\times n}x=b$无解的充分必要条件是系数矩阵A的秩不等于增广矩阵的 $B=(A,b)$ 秩。